11) Sei $M := \{a, b, c, d\}$, sei $R = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, c), (c, a), (c, d), (d, d)\}$ und sei G der Graph der Relation R. Stellen Sie die Adjazenzmatrix des Graphen G auf, berechnen Sie mit dem Algorithmus von Warshall die Adjazenzmatrix der transitiven Hülle T von R und geben Sie die Mengendifferenz $M^2 \setminus T$ an.

Bei Numerierung der Ecken nach dem Alphabet ist die Adjazenzmatrix von R

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Algorithmus von Warshall liefert die Adjazenzmatrix von T :

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$M^2 \setminus T = \{(d, a), (d, b), (d, c)\}.$$

12) Berechnen Sie mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler d von 233 und 144, weiters ganze Zahlen u und v mit $233 \cdot u + 144 \cdot v = d$ sowie das kleinste gemeinsame Vielfache von 233 und 144.

Der erweiterte euklidische Algorithmus mit $a = 233$ und $b = 144$ liefert:

q	A	B
	$(233, 1, 0)$	$(144, 0, 1)$
1	$(144, 0, 1)$	$(89, 1, -1)$
1	$(89, 1, -1)$	$(55, -1, 2)$
1	$(55, -1, 2)$	$(34, 2, -3)$
1	$(34, 2, -3)$	$(21, -3, 5)$
1	$(21, -3, 5)$	$(13, 5, -8)$
1	$(13, 5, -8)$	$(8, -8, 13)$
1	$(8, -8, 13)$	$(5, 13, -21)$
1	$(5, 13, -21)$	$(3, -21, 34)$
1	$(3, -21, 34)$	$(2, 34, -55)$
1	$(2, 34, -55)$	$(1, -55, 89)$

Somit sind $d = 1$, $u = -55$ und $v = 89$. Das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b ist

$$a \cdot \frac{b}{d} = 233 \cdot \frac{144}{1} = 33\,552\,.$$

13) Seien die Automaten A und B durch die folgenden Übergangstabellen gegeben:

	a	b
$\rightarrow *1$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
2	$\varnothing$	$\{1\}$

	ϵ	a	b
$\rightarrow 1$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\varnothing$
$*2$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\varnothing$
3	$\varnothing$	$\{2\}$	$\{2,3\}$

Minimierung Sie A und B und beweisen oder widerlegen Sie: Die Automaten A und B sind äquivalent.

Teilmengenkonstruktion und Minimierung von A und B liefert die folgenden deterministischen endlichen Automaten:

	a	b
$*\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$*\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\varnothing$	$\{1\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

	a	b
$\rightarrow *\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	$\varnothing$
$*\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Aus diesen Automaen läßt sich nun leicht erkennen, dass die akzeptierten Sprachen unterschiedlich sind. Etwa gilt $bba \in \mathrm{L}(A)$, aber $bba \notin \mathrm{L}(B)$.

14) Betrachten Sie den folgenden DEA C:

	a	b
$\rightarrow p$	q	p
$*q$	q	p

Wandeln Sie C in einen regulären Ausdruck um, indem Sie die Methode aus der Skriptum verwenden.

Zunächst benennen wir die Zustände um: $p \rightarrow 1$ und $q \rightarrow q$. Nun wenden wir die Rekursionsgleichung an und erhalten:

$$
\begin{aligned}
&R_{12}^2 = R_{12}^1 + R_{12}^1(R_{22}^1)^* R_{22}^1 \\
&R_{12}^1 = R_{12}^0 + R_{11}^0(R_{11}^0)^* R_{12}^0 = a + (b+\epsilon)(b+\epsilon)^* a \\
&R_{22}^1 = R_{22}^0 + R_{21}^0(R_{11}^0)^* R_{12}^0 = a + \epsilon + b(b+\epsilon)^* a \\
&R_{12}^0 = a \\
&R_{11}^0 = b + \epsilon \\
&R_{22}^0 = a + \epsilon \\
&R_{21}^0 = b
\end{aligned}
$$

Der zusammengesetzte Ausdruck hat also die Form:

$$(a+(b+\epsilon)(a+\epsilon)^*a)+(a+(b+\epsilon)(a+\epsilon)^*a)(a+\epsilon+b(a+\epsilon)^*a)^*(a+\epsilon+b(a+\epsilon)^*a)\ .$$