1) Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zur Aussage $f \in \mathrm{o}(g)$?

   – $\lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 0$

2) Sei M eine Menge mit einer wohlfundierten partiellen Ordnung $\leq$. Welche der folgenden Aussagen ist allgemein richtig ?

   – Es gibt keine unendliche absteigende Kette in M.

3) Wieviele Funktionen $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}^2$ gibt es ?

   – 256.

4) Welche der folgenden Mengen ist nicht abzählbar ?

   – $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

5) Welche Komplexität hat der binäre euklidische Algorithmus für Zahlen mit n Binärziffern ?

   – $\mathrm{O}(\mathrm{n}^2)$ Bitoperationen

6) Welche der folgenden Aussagen zu regulären Sprachen ist richtig?

   – Die Klasse der Sprachen, die von einem deterministischen Automaten akzeptiert werden sind eine Unterklasse der regulären Sprachen.

7) Welche der folgenden Sprachen ist nicht regulär?

   – $\{x|x$ ist regulärer Ausdruck über $\{a,b\}\}$.

8) Welches der folgenden Gesetze über reguläre Ausdrücke gilt nicht? (Hierbei bezeichnen D, E, F reguläre Ausdrücke und wir schreiben vereinfachend E für die von E beschriebene Sprache $L(E)$.)

   – $(D(E+F)) = (DE + FD)$.

9) Welche der folgenden Aussagen zu Turingmaschinen und regulären Sprachen ist richtig?

   – Jede ϵ-NEA kann in eine Turingmaschine umgewandelt werden.

10) Welche der folgenden Aussagen zur Entscheidbarkeit beziehungsweise Unentscheidbarkeit ist richtig?

   – Es gibt eine rekursiv aufzählbare Menge, die nicht rekursiv ist.

11) Sei $M := \{a,b,c,d\}$, sei $R = \{(a,b),(a,d),(b,b),(b,c),(c,a),(c,d),(d,d)\}$ und sei G der Graph der Relation R. Stellen Sie die Adjazenzmatrix des Graphen G auf, berechnen Sie mit dem Algorithmus von Warshall die Adjazenzmatrix der transitiven Hülle T von R und geben Sie die Mengendifferenz $M^2 \setminus T$ an.

Bei Numerierung der Ecken nach dem Alphabet ist die Adjazenzmatrix von R

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Algorithmus von Warshall liefert die Adjazenzmatrix von T :

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$M^2 \setminus T = \{(d,a),(d,b),(d,c)\}.$$

12) Berechnen Sie mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler d von 234 und 144, weiters ganze Zahlen u und v mit $234 \cdot u + 144 \cdot v = d$ sowie das kleinste gemeinsame Vielfache von 234 und 144.

Der erweiterte euklidische Algorithmus mit $a = 234$ und $b = 144$ liefert:

q	A	B
	$(234, 1, 0)$	$(144, 0, 1)$
1	$(144, 0, 1)$	$(90, 1, -1)$
1	$(90, 1, -1)$	$(54, -1, 2)$
1	$(54, -1, 2)$	$(36, 2, -3)$
1	$(36, 2, -3)$	$(18, -3, 5)$

Somit sind $d = 18$, $u = -3$ und $v = 5$. Das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b ist

$$a \cdot \frac{b}{d} = 234 \cdot \frac{144}{18} = 234 \cdot 8 = 1872\,.$$

13) Seien die Automaten A und B durch die folgenden Übergangstabellen gegeben:

	ϵ	a	b
$\to p$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\varnothing$
$*q$	$\varnothing$	$\{p\}$	$\varnothing$
r	$\varnothing$	$\{q\}$	$\{q,r\}$

	a	b
$\to *p$	$\{q\}$	$\{p,q\}$
q	$\varnothing$	$\{p\}$

Minimierung Sie A und B und beweisen oder widerlegen Sie: Die Automaten A und B sind äquivalent. (Beachte, dass nur Automat B minimiert werden kann.)

Teilmengenkonstruktion und Minimierung von A und B liefert die folgenden deterministischen endlichen Automaten.

	a	b
$\rightarrow *\{p,q\}$	$\{p,q,r\}$	$\varnothing$
$*\{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$	$\{q,r\}$
$*\{q,r\}$	$\{p,q\}$	$\{q,r\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

	a	b
$\rightarrow *\{p,q\}$	$\{q\}$	$\{p,q\}$
$\{q\}$	$\varnothing$	$\{p,q\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Aus diesen Automaen läßt sich nun leicht erkennen, dass die akzeptierten Sprachen unterschiedlich sind. Etwa gilt $abb \in \mathrm{L}(A)$, aber $abb \notin \mathrm{L}(B)$.

14) Betrachten Sie den folgenden DEA C:

	a	b
$\rightarrow p$	q	p
$*q$	q	p

Wandeln Sie C in einen regulären Ausdruck um, indem Sie die Methode aus der Skriptum verwenden.

Zunächst benennen wir die Zustände um: $p \rightarrow 1$ und $q \rightarrow 2$. Nun wenden wir die Rekursionsgleichung an und erhalten:

$$\begin{aligned}
&R^2_{12} = R^1_{12} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{22} \\
&R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = a + (b+\epsilon)(b+\epsilon)^* a \\
&R^1_{22} = R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} = a + \epsilon + b(b+\epsilon)^* a \\
&R^0_{12} = a \\
&R^0_{11} = b + \epsilon \\
&R^0_{22} = a + \epsilon \\
&R^0_{21} = b
\end{aligned}$$

Der zusammengesetzte Ausdruck hat also die Form:

$$(a+(b+\epsilon)(b+\epsilon)^*a)+(a+(b+\epsilon)(b+\epsilon)^*a)(a+\epsilon+b(b+\epsilon)^*a)^*(a+\epsilon+b(b+\epsilon)^*a)\ .$$