11) Sei G der bewertete Graph mit der Eckenmenge $\{a, b, c, d\}$ und der Kantenmenge

$$\{(a, 3, b), (a, 5, c), (a, 1, d), (b, 1, c), (b, 2, d), (d, 1, a), (d, 1, b)\},$$

wobei in jedem Tripel die erste Komponente die Anfangsecke, die zweite Komponente die Kantenbewertung und die dritte Komponente die Endecke angibt. Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Floyd alle Abstände zwischen den Ecken. Geben Sie die Startmatrix sowie in jedem Schritt des Algorithmus die berechnete Matrix an.

Bei Numerierung der Ecken nach dem Alphabet läuft Floyd wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 3 & 5 & 1 \\ \infty & 0 & 1 & 2 \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ 1 & 1 & \infty & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ \infty & \boxed{0} & 1 & 2 \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ 1 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ \infty & 0 & 1 & 2 \\ \infty & \infty & \boxed{0} & \infty \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ \infty & 0 & 1 & 2 \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

12) Sei G der bewertete Graph mit den Ecken a, b, c, d, e, f, g und den Kanten

$$\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, g\}, \{d, g\}, \{e, f\}.$$

Die Bewertung dieser Kanten in obiger Reihenfolge sei

$$2, 3, 1, 2, 1, 3, 2, 1.$$

Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Kruskal einen spannenden Wald mit minimaler Bewertung.

Kruskal liefert:

k_i	$b(k_i)$	P
		$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}\}$
$\{b, d\}$	1	$\{\{a\}, \{b, d\}, \{c\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}\}$
$\{c, d\}$	1	$\{\{a\}, \{b, c, d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}\}$
$\{e, f\}$	1	$\{\{a\}, \{b, c, d\}, \{e, f\}, \{g\}\}$
$\{a, b\}$	2	$\{a, b, c, d\}, \{e, f\}, \{g\}\}$
$\{b, f\}$	2	$\{\{a, b, c, d, e, f\}, \{g\}\}$
$\{d, g\}$	2	$\{\{a, b, c, d, e, f, g\}\}$
$\{c, d\}$	3	
$\{a, e\}$	3	

Somit ist $W = \{\{a,b\},\{b,d\},\{b,f\},\{c,d\},\{d,g\},\{e,f\}\}$ der einzige spannende Wald mit minimaler Bewertung und ein Baum.

13) Berechnen Sie mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler d von 234 und 144, weiters ganze Zahlen u und v mit

$$234 \cdot u + 144 \cdot v = d$$

sowie das kleinste gemeinsame Vielfache von 234 und 144.

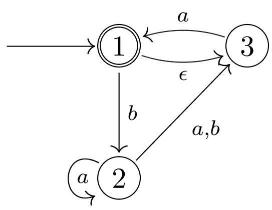
Der erweiterte euklidische Algorithmus mit $a = 234$ und $b = 144$ liefert:

A, B	q
$(234, 1, 0)$	
$(144, 0, 1)$	1
$(90, 1, -1)$	1
$(54, -1, 2)$	1
$(36, 2, -3)$	1
$(18, -3, 5)$	

Somit sind $d = 18$, $u = -3$ und $v = 5$. Das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b ist

$$a \cdot \frac{b}{d} = 234 \cdot \frac{144}{18} = 234 \cdot 8 = 1872\,.$$

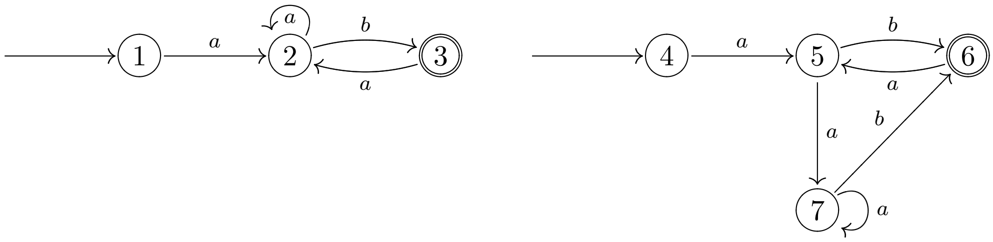
14) Betrachten Sie den folgenden ϵ-NEA N und wandeln Sie diesen in einen DEA um. Verwenden Sie dazu die Teilmengenkonstruktion.



Der DEA wird durch folgende Tabelle definiert:

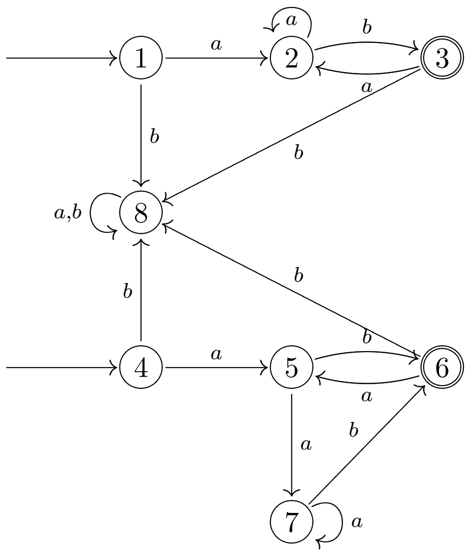
	a	b
$*\{1,3\}$	$\{1,3\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2,3\}$	$\{3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\{3\}$	$\{1,3\}$	$\varnothing$
$*\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

15) Betrachten Sie die folgenden beiden Automaten A und B:



Entscheiden Sie ob diese beiden Automaten äquivalent sind. Verwenden Sie dazu den Table-Filling Algorithmus indem Sie A und B als einzigen Automaten mit zwei Startzustnden betrachten.

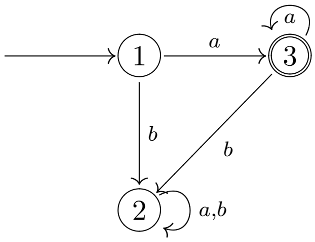
Beachten Sie dass beide Automaten deterministisch sind in dem Sinn, dass zu jeden Zustand und jeder Eingabe maximal ein bergang zulässig ist. Wir vereinen die beiden Automaten und fügen einen gemeinsamen Fangzustand ein.



Für diesen Automaten zeigen wir jetzt mit dem Table-Filling Algorithmus dass die Startzustände äquivalent sind, darauf folgt die Äquivalenz der Automaten.

1							
✓	2						
✓	✓	3					
	✓	✓	4				
✓		✓	✓	5			
✓	✓		✓	✓	6		
✓		✓	✓		✓	7	
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	8

16) Betrachten sie den folgenden DEA C:



Wandeln Sie C in einen regulären Ausdruck um, indem Sie die Methode aus der Skriptum verwenden. (Vergessen Sie nicht den regulären Ausdruck auch zusammenzusetzen, dabei können Sie, mssen aber nicht die Zwischenschritte vereinfachen.)

$$
\begin{aligned}
R^3_{1,3} &= R^2_{1,3} + R^2_{1,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,3} && = \mathbf{a} + \mathbf{aa}^* = \mathbf{a}^+ \\
R^2_{1,3} &= R^1_{1,3} + R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,3} && = \mathbf{a} + \mathbf{b}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^* \varnothing = \mathbf{a} \\
R^2_{3,3} &= R^1_{3,3} + R^1_{3,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,3} && = \mathbf{a} + \epsilon + \varnothing = \mathbf{a} + \epsilon \\
R^1_{1,3} &= R^0_{1,3} + R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,3} && = \mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{a} \\
R^1_{1,2} &= R^0_{1,2} + R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} && = \mathbf{b} + \mathbf{b} = \mathbf{b} \\
R^1_{2,2} &= R^0_{2,2} + R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} && = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \epsilon \\
R^1_{2,3} &= R^0_{2,3} + R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,3} && = \varnothing + \varnothing = \varnothing \\
R^1_{3,3} &= R^0_{3,3} + R^0_{3,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,3} && = \mathbf{a} + \epsilon \\
R^1_{3,2} &= R^0_{3,2} + R^0_{3,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} && = \mathbf{b} + \varnothing = \mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Der zu C quivalente regulre Ausdruck ist als $\mathbf{a}^+$.