11) Sei G der bewertete Graph mit der Eckenmenge $\{a, b, c, d\}$ und der Kantenmenge

$$\{(a, 1, b), (a, 4, c), (b, 2, a), (c, 2, b), (d, 4, c), (d, 1, a)\},$$

wobei in jedem Tripel die erste Komponente die Anfangsecke, die zweite Komponente die Kantenbewertung und die dritte Komponente die Endecke angibt. Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Floyd alle Abstände zwischen den Ecken. Geben Sie die Startmatrix sowie in jedem Schritt des Algorithmus die berechnete Matrix an.

Bei Numerierung der Ecken nach dem Alphabet läuft Floyd wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 4 & \infty \\ 2 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty \\ 1 & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty \\ 2 & \boxed{0} & 6 & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty \\ 2 & 0 & 6 & \infty \\ 4 & 2 & \boxed{0} & \infty \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty \\ 2 & 0 & 6 & \infty \\ 4 & 2 & 0 & \infty \\ 1 & 2 & 4 & \boxed{0} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty \\ 2 & 0 & 6 & \infty \\ 4 & 2 & 0 & \infty \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

12) Sei G der bewertete Graph mit den Ecken a, b, c, d, e, f, g und den Kanten

$$\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, g\}, \{d, g\}, \{e, f\}.$$

Die Bewertung dieser Kanten in obiger Reihenfolge sei

$$1, 2, 3, 1, 2, 1, 3, 2.$$

Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Kruskal einen spannenden Wald mit minimaler Bewertung.

Kruskal liefert:

k_i	$b(k_i)$	P
		$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}\}$
$\{a, b\}$	1	$\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}\}$
$\{b, f\}$	1	$\{\{a, b, f\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{g\}\}$
$\{c, g\}$	1	$\{\{a, b, f\}, \{c, g\}, \{d\}, \{e\}\}$
$\{a, e\}$	2	$\{\{a, b, e, f\}, \{c, g\}, \{d\}\}$
$\{c, d\}$	2	$\{\{a, b, e, f\}, \{c, d, g\}\}$
$\{e, f\}$	2	
$\{b, e\}$	3	
$\{d, g\}$	3	

Somit ist $W = \{\{a,b\},\{b,f\},\{c,g\},\{a,e\},\{c,d\}\}$ ein spannender Wald mit minimaler Bewertung und kein Baum.

13) Berechnen Sie mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler d von 233 und 89, weiters ganze Zahlen u und v mit $233 \cdot u + 89 \cdot v = d$ sowie das kleinste gemeinsame Vielfache von 233 und 89.

Der erweiterte euklidische Algorithmus mit $a = 233$ und $b = 89$ liefert:

q	A	B
	$(233,1,0)$	$(89,0,1)$
2	$(89,0,1)$	$(55,1,-2)$
1	$(55,1,-2)$	$(34,-1,3)$
1	$(34,-1,3)$	$(21,2,-5)$
1	$(21,2,-5)$	$(13,-3,8)$
1	$(13,-3,8)$	$(8,5,-13)$
1	$(8,5,-13)$	$(5,-8,21)$
1	$(5,-8,21)$	$(3,13,-34)$
1	$(3,13,-34)$	$(2,-21,55)$
1	$(2,-21,55)$	$(1,34,-89)$

Somit sind $d = 1$, $u = 34$ und $v = -89$. Das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b ist

$$a \cdot \frac{b}{d} = 233 \cdot 89 = 20737\,.$$

14) Teilmengenkonstruktion von N liefert den folgenden deterministischen endlichen Automaten:

	a	b
$\rightarrow *\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	$\varnothing$
$*\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$*\{2,3\}$	$\{1,2\}$	$\{2,3\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

15) Zunchst entfernen wir die unerreichbaren Zustände 7, 8, 9 und 10. Dann wenden wir den Markierungsalgorithmus an, um die folgende Tabelle zu erhalten:

	1	2	3	4	5
2	✓				
3		✓			
4	✓	✓	✓		
5	✓	✓	✓	✓	
6	✓	✓	✓	✓	✓

Aus dieser Tabelle kann der folgende minimale Automat generiert werden.

	a	b
$\rightarrow \{5\}F$	$\{1,3\}$	$\{6\}$
$\{6\}F$	$\{6\}$	$\{6\}$
$\{1,3\}$	$\{1,3\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{4\}$	$\{2\}$
$\{4\}$	$\{6\}$	$\{2\}$

16) Zunchst benennen wir die Zustnde um: $p \rightarrow 1$ und $q \rightarrow q$. Nun wenden wir die Rekursionsgleichung an und erhalten:

$$\begin{aligned}
R_{12}^2 &= R_{12}^1 + R_{12}^1 (R_{22}^1)^* R_{22}^1 \\
R_{12}^1 &= R_{12}^0 + R_{11}^0 (R_{11}^0)^* R_{12}^0 = a + (b+\epsilon)(b+\epsilon)^* a \\
R_{22}^1 &= R_{22}^0 + R_{21}^0 (R_{11}^0)^* R_{12}^0 = a + \epsilon + b(b+\epsilon)^* a \\
R_{12}^0 &= a \\
R_{11}^0 &= b + \epsilon \\
R_{22}^0 &= a + \epsilon \\
R_{21}^0 &= b
\end{aligned}$$

Der zusammengesetzte Ausdruck hat also die Form:

$$(a+(b+\epsilon)(a+\epsilon)^*a)+(a+(b+\epsilon)(a+\epsilon)^*a)(a+\epsilon+b(a+\epsilon)^*a)^*(a+\epsilon+b(a+\epsilon)^*a) \, .$$