11) *Lösung.* Sei G der bewertete Graph mit der Eckenmenge $\{a, b, c, d\}$ und der Kantenmenge

$$\{(a,1,b),(a,4,c),(b,2,a),(c,2,b),(d,4,c),(d,1,a)\},$$

wobei in jedem Tripel die erste Komponente die Anfangsecke, die zweite Komponente die Kantenbewertung und die dritte Komponente die Endecke angibt. Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Floyd alle Abstände zwischen den Ecken. Geben Sie die Startmatrix sowie in jedem Schritt des Algorithmus die berechnete Matrix an.

Bei Numerierung der Ecken nach dem Alphabet läuft Floyd wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 4 & \infty \\ 2 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty \\ 1 & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty \\ 2 & \boxed{0} & 6 & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty \\ 2 & 0 & 6 & \infty \\ 4 & 2 & \boxed{0} & \infty \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty \\ 2 & 0 & 6 & \infty \\ 4 & 2 & 0 & \infty \\ 1 & 2 & 4 & \boxed{0} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty \\ 2 & 0 & 6 & \infty \\ 4 & 2 & 0 & \infty \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

12) *Lösung.* Kruskal liefert:

k_i	$b(k_i)$	P
		$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$
$\{a,e\}$	1	$\{\{a,e\},\{b\},\{c\},\{d\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$
$\{c,d\}$	2	$\{\{a,e\},\{b\},\{c,d\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$
$\{c,e\}$	3	$\{\{a,c,d,e\},\{b\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$
$\{a,d\}$	4	
$\{a,c\}$	5	
$\{f,g\}$	6	$\{\{a,c,d,e\},\{b\},\{f,g\},\{h\}\}$
$\{b,g\}$	7	$\{\{a,c,d,e\},\{b,f,g\},\{h\}\}$
$\{b,f\}$	8	
$\{g,h\}$	9	$\{\{a,c,d,e\},\{b,f,g,h\}\}$

□

13) *Lösung.* Der erweiterte euklidische Algorithmus mit $a = 111$ und $b = 97$ liefert:

A, B	q
$(111, 1, 0)$	
$(97, 0, 1)$	1
$(14, 1, -1)$	6
$(13, -6, 7)$	1
$(1, 7, -8)$	1

Somit sind $d = 1$, $u = -8$ und $v = 7$. Das Inverse von 97 modulo 111 ist -8, d.h. 103 modulo 111. □

14) *Lösung.* Die Teilmengenkonstruktion liefert folgenden Automaten:

	a	b
$\to *\{p\}$	$\{q\}$	$\{p, q\}$
$\{q\}$	$\{q\}$	$\{p\}$
$*\{p, q\}$	$\{q\}$	$\{p, q\}$

□

15) *Lösung.* Zunächst entfernen wir die unerreichbaren Zustände 7, 8, 9 und 10. Dann wenden wir den Markierungsalgorithmus an, um die folgende Tabelle zu erhalten:

	1	2	3	4	5
2	✓				
3		✓			
4	✓	✓	✓		
5	✓	✓	✓	✓	
6	✓	✓	✓	✓	✓

Aus dieser Tabelle kann der folgende minimale Automat generiert werden.

	a	b
$\to *\{5\}$	$\{1, 3\}$	$\{6\}$
$*\{6\}$	$\{6\}$	$\{6\}$
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{4\}$	$\{2\}$
$\{4\}$	$\{6\}$	$\{2\}$

□

16) *Lösung.* Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten das Wort $w = 1^n01^n \in L$. Dann hat jede Zerlegung $w = xyz$ mit $\ell(xy) \leqslant n$, $y \neq \epsilon$ die Gestalt $x = 1^i$, $y = 1^j$ und $z = 1^{n-i-j}01^n$ wobei $n - i - j \geqslant 0$ und $j \neq 0$. Dann gilt, fuer $k = 2$:

$$xy^kz = 1^i(1^j)^2 1^{n-i-j}01^n = 1^{n+j}01^n \notin L\ ,$$

da $j > 0$. Somit ist L nicht regulär. □