11) *Lösung.* Die folgenden Matrixen bezeichen die Zwischenmatrizen N für $r = 0, 1, 2, 3$, die in der Ausführung des Algorithmus von Floyd erzielt werden. Die durchgestrichenen Zeilen und Spalten bezeichnen jeweils die für die Berechnung der jeweils nächsten Matrix zu betrachtenden Elemente B_{ir}, B_{rj}.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & \infty & 3 \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

12) *Lösung.* Der Graph G ist vollständig und hat die folgende Kantenmenge (in einer möglichen Sortierung):

$$\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{a,f\},\{b,a\},\{b,c\},\{b,d\},\{b,e\},\{b,f\}$$
$$\{c,a\},\{c,b\},\{c,d\},\{c,e\},\{c,f\},\{d,a\},\{d,b\},\{d,c\},\{d,e\},\{d,f\}$$
$$\{e,a\},\{e,b\},\{e,c\},\{e,d\},\{e,f\}\}$$

Basierend auf dieser Vorsortierung erhalten wir die folgende Tabelle, deren rechteste Spalte wir sukzessive von oben nach unten ausrechnen können.

$r(k)$	$P = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\}\}$
$\{a,b\}$	$P = \{\{a,b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\}\}$
$\{a,c\}$	$P = \{\{a,b,c\},\{d\},\{e\},\{f\}\}$
$\{a,d\}$	$P = \{\{a,b,c,d\},\{e\},\{f\}\}$
$\{a,e\}$	$P = \{\{a,b,c,d,e\},\{f\}\}$
$\{a,f\}$	$P = \{a,b,c,d,e,f\}$
	$\vdots$

Somit gilt:

$$P = \{\{a,b,c,d,e,f\}\}$$
$$W = \{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f)\}\ ,$$

und die Kantenmenge W definiert einen (nicht eindeutigen) spannenden Baum. □

13) *Lösung.* Der erweiterte euklidische Algorithmus mit $a = 234$ und $b = 144$ liefert:

A, B	q
$(234, 1, 0)$	
$(144, 0, 1)$	1
$(90, 1, -1)$	1
$(54, -1, 2)$	1
$(36, 2, -3)$	1
$(18, -3, 5)$	

Somit sind $d = 18$, $u = -3$ und $v = 5$. Das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b ist

$$a \cdot \frac{b}{d} = 234 \cdot \frac{144}{18} = 234 \cdot 8 = 1872\,.$$

□

14) *Lösung.* Wir bilden zuerst die ϵ-Hüllen:

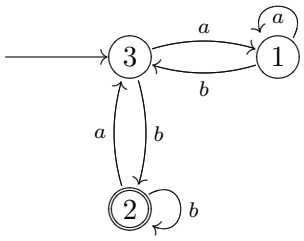
$$\begin{aligned}
&\epsilon\text{-Hülle}(1) = \{1, 2, 3\} && \epsilon\text{-Hülle}(2) = \{2, 3\} \\
&\epsilon\text{-Hülle}(3) = \{3\} && \epsilon\text{-Hülle}(4) = \{4, 5\} \\
&\epsilon\text{-Hülle}(5) = \{4, 5\} && \epsilon\text{-Hülle}(6) = \{6\} \\
&\epsilon\text{-Hülle}(7) = \{7\}
\end{aligned}$$

Der DEA wird nun durch folgende Tabelle definiert:

	a	b
$\rightarrow \{1, 2, 3\}$	$\{3, 4, 5\}$	$\{2, 3, 4, 5\}$
$\{3, 4, 5\}$	$\{4, 5, 7\}$	$\{4, 5, 6\}$
$\{2, 3, 4, 5\}$	$\{4, 5, 7\}$	$\{4, 5, 6\}$
$*\{4, 5, 7\}$	$\{4, 5, 7\}$	$\{4, 5, 6\}$
$*\{4, 5, 6\}$	$\{4, 5, 7\}$	$\{4, 5, 6\}$

□

15) *Lösung.* Um die Aufgabe zu erleichtern, benennen wir die Zustände um, sodass wir den folgenden Automaten D erhalten:



Der zu D (und somit zu C) äquivalente reguläre Ausdruck ist $R^3_{1,2} = R^2_{1,2} + R^2_{1,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,2}$ wobei die Teilausdrücke wie folgt berechnet werden. Dabei können die Ausdrücke $R^i_{1,2}$, $R^i_{2,1}$ $(i = 0, 1, 2)$ ignoriert werden, da offensichtlich $R^i_{1,2} = R^i_{2,1} = \varnothing$ gilt.

$$
\begin{aligned}
R^2_{1,3} &= R^1_{1,3} && = \mathbf{a}^*\mathbf{b} \\
R^2_{3,3} &= R^1_{3,3} + R^1_{3,2}(R^1_{2,2})^* R_{2,3} && = (\epsilon + \mathbf{a}^+\mathbf{b}) + \mathbf{b}^+\mathbf{a}(\epsilon + \mathbf{a}^*\mathbf{b}) \\
R^2_{3,1} &= R^1_{3,1} && = \mathbf{a}^+ \\
R^1_{1,3} &= R^0_{1,3} + R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^*(R^0_{1,3} && = \mathbf{b} + (\mathbf{a} + \epsilon)(\mathbf{a} + \epsilon)^*\mathbf{b} = \mathbf{a}^*\mathbf{b} \\
R^1_{2,2} &= R^0_{2,2} && = (\mathbf{b} + \epsilon) \\
R^1_{2,3} &= R^0_{2,3} + R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,3} && = \mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{a} + \epsilon)^*\mathbf{b} = \mathbf{a}(\epsilon + \mathbf{a}^*\mathbf{b}) \\
R^1_{3,1} &= R^0_{3,1} + R^0_{3,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,1} && = \mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{a} + \epsilon)^*\mathbf{a} = \mathbf{a}^+ \\
R^1_{3,3} &= R^0_{3,3} + R_{3,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{3,1} && = \epsilon + \mathbf{a}(\mathbf{a} + \epsilon)^*\mathbf{b} = \epsilon + \mathbf{a}^+\mathbf{b} \\
R^1_{3,2} &= R^0_{3,2} && = \mathbf{b}
\end{aligned}
$$

□

16) *Lösung.* Sei $n \in \mathcal{N}$ beliebig. Wir betrachten das Wort $w = \mathsf{a}^n\mathsf{c}^n = \mathsf{a}^n\mathsf{b}^0\mathsf{c}^n \in L$. Dann hat jede Zerlegung $w = xyz$ mit $\ell(()xy) \leqslant n$, $y \neq \epsilon$ die Gestalt $x = \mathsf{a}^i$, $y = \mathsf{a}^j$ und $z = \mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{c}^n$ wobei $n - i - j \geqslant 0$ und $j \neq 0$. Dann gilt, fuer $k = 2$, $xy^kz = \mathsf{a}^i(\mathsf{a}^j)^2\mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{c}^n = \mathsf{a}^{n+j}\mathsf{b}^0\mathsf{c}^n \notin L$. Letzteres folgt da $(n + j) + 0 \nleqslant n$. Somit ist L nicht regulär. □