11) *Lösung.* Die folgenden Matrixen bezeichen die Zwischenmatrizen N für $r = 0, 1, 2, 3$, die in der Ausführung des Algorithmus von Warshall erzielt werden. Die durchgestrichenen Zeilen und Spalten bezeichnen jeweils die für die Berechnung der jeweils nächsten Matrix zu betrachtenden Elemente A_{ir}, A_{rj}.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist die transitive Hülle T der Relation R geben durch: $\{a, b, c, d\}^2$. □

12) *Lösung.* Kruskal liefert:

k_i	$b(k_i)$	P
		$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}\}$
$\{a, b\}$	1	$\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}\}$
$\{b, f\}$	1	$\{\{a, b, f\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{g\}\}$
$\{c, g\}$	1	$\{\{a, b, f\}, \{c, g\}, \{d\}, \{e\}\}$
$\{a, e\}$	2	$\{\{a, b, e, f\}, \{c, g\}, \{d\}\}$
$\{c, d\}$	2	$\{\{a, b, e, f\}, \{c, d, g\}\}$
$\{e, f\}$	2	
$\{b, e\}$	3	
$\{d, g\}$	3	

Somit ist $W = \{\{a, b\}, \{b, f\}, \{c, g\}, \{a, e\}, \{c, d\}\}$ ein spannender Wald mit minimaler Bewertung und kein Baum. □

13) *Lösung.* Der erweiterte euklidische Algorithmus mit $a = 233$ und $b = 144$ liefert:

q	A	B
	$(233, 1, 0)$	$(144, 0, 1)$
1	$(144, 0, 1)$	$(89, 1, -1)$
1	$(89, 1, -1)$	$(55, -1, 2)$
1	$(55, -1, 2)$	$(34, 2, -3)$
1	$(34, 2, -3)$	$(21, -3, 5)$
1	$(21, -3, 5)$	$(13, 5, -8)$
1	$(13, 5, -8)$	$(8, -8, 13)$
1	$(8, -8, 13)$	$(5, 13, -21)$
1	$(5, 13, -21)$	$(3, -21, 34)$
1	$(3, -21, 34)$	$(2, 34, -55)$
1	$(2, 34, -55)$	$(1, -55, 89)$

□

14) *Lösung.* Wir bilden zuerst die ϵ-Hüllen:

ϵ-Hülle$(1) = \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ ϵ-Hülle$(2) = \{2\}$

ϵ-Hülle$(3) = \{2, 3\}$ $\qquad$ ϵ-Hülle$(4) = \{4, 5\}$

ϵ-Hülle$(5) = \{4, 5\}$ $\qquad$ ϵ-Hülle$(6) = \{6\}$

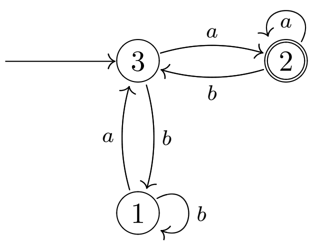
ϵ-Hülle$(7) = \{7\}$

Der DEA wird nun durch folgende Tabelle definiert:

	a	b
$\rightarrow \{1, 2, 3\}$	$\{2, 3, 4, 5\}$	$\{2, 4, 5\}$
$\{2, 3, 4, 5\}$	$\{4, 5, 7\}$	$\{4, 5, 6\}$
$\{3, 4, 5\}$	$\{4, 5, 7\}$	$\{4, 5, 6\}$
$* \{4, 5, 7\}$	$\{4, 5, 7\}$	$\{4, 5, 6\}$
$* \{4, 5, 6\}$	$\{4, 5, 7\}$	$\{4, 5, 6\}$

□

15) *Lösung.* Um die Aufgabe zu erleichtern, benennen wir die Zustände um, sodass wir den folgenden Automaten D erhalten:



Der zu D (und somit zu C) äquivalente reguläre Ausdruck ist $R^3_{1,2} = R^2_{1,2} + R^2_{1,3}(R^2_{3,3})^* R^2_{3,2}$ wobei die Teilausdrücke wie folgt berechnet werden. Dabei können die Ausdrücke $R^i_{1,2}$, $R^i_{2,1}$ $(i = 0, 1, 2)$ ignoriert werden, da offensichtlich $R^i_{1,2} = R^i_{2,1} = \varnothing$ gilt.

$$
\begin{aligned}
R^2_{1,3} = R^1_{1,3} & = \mathbf{b}^*\mathbf{a} \\
R^2_{3,3} = R^1_{3,3} + R^1_{3,2}(R^1_{2,2})^* R_{2,3} & = (\epsilon + \mathbf{b}^+\mathbf{a}) + \mathbf{a}^+\mathbf{b}(\epsilon + \mathbf{b}^*\mathbf{a}) \\
R^2_{3,1} = R^1_{3,1} & = \mathbf{b}^+ \\[1ex]
R^1_{1,3} = R^0_{1,3} + R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^*(R^0_{1,3} & = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \epsilon)(\mathbf{b} + \epsilon)^*\mathbf{a} = \mathbf{b}^*\mathbf{a} \\
R^1_{2,2} = R^0_{2,2} & = (\mathbf{a} + \epsilon) \\
R^1_{2,3} = R^0_{2,3} + R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,3} & = \mathbf{b} + \mathbf{b}(\mathbf{b} + \epsilon)^*\mathbf{a} = \mathbf{b}(\epsilon + \mathbf{b}^*\mathbf{a}) \\
R^1_{3,1} = R^0_{3,1} + R^0_{3,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,1} & = \mathbf{b} + \mathbf{b}(\mathbf{b} + \epsilon)^*\mathbf{b} = \mathbf{b}^+ \\
R^1_{3,3} = R^0_{3,3} + R_{3,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{3,1} & = \epsilon + \mathbf{b}(\mathbf{b} + \epsilon)^*\mathbf{a} = \epsilon + \mathbf{b}^+\mathbf{a} \\
R^1_{3,2} = R^0_{3,2} & = \mathbf{a}
\end{aligned}
$$

□

16) *Lösung.* Sei $n \in \mathcal{N}$ beliebig. Wir betrachten das Wort $w = \mathsf{a}^n\mathsf{c}^n = \mathsf{a}^n\mathsf{b}^0\mathsf{c}^n \in L$. Dann hat jede Zerlegung $w = xyz$ mit $\ell(xy) \leqslant n$, $y \neq \epsilon$ die Gestalt $x = \mathsf{a}^i$, $y = \mathsf{a}^j$ und $z = \mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{c}^n$ wobei $n - i - j \geqslant 0$ und $j \neq 0$. Dann gilt, fuer $k = 0$, $xy^kz = \mathsf{a}^i(\mathsf{a}^j)^0\mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{c}^n = \mathsf{a}^{n-j}\mathsf{b}^0\mathsf{c}^n \notin L$. Letzteres folgt da $(n - j) + 0 \ngeqslant n$. Somit ist L nicht regulär. □