Computational Logic

Diskrete Mathematik

Martin Avanzini Arne Dür Christoph Kollreider Georg Moser

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2010

Zusammenfassung der letzten LV

Problem MAZE

gegeben

- gerichteter Graph G mit Eckenmenge E
- Knoten $s, t \in E$

$\exists$ Weg zwischen s und t?

Problem TSP

gegeben

- n Städte
- Distanz $d_{ij} > 0$, sodass $d_{ij} = d_{ji}$

gesucht: Minimum der Kostensumme:

$$\sum_{i=1}^{n} d_{\pi(i),\pi(i+1)}$$

$\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ Permutation mit $\pi(n+1) := \pi(1)$

Problem GG

das Spiel verallgemeinerte Länderkunde ist ein Zweipersonenspiel
Spieler heißen Anna und Otto, gegeben

- gerichteter Graph G und Startknoten s
- Anna beginnt im Land s sie
  wählt ein erreichbares (unmarkiertes) Land t, welches sie markiert
- Otto zieht von t weiter und markiert wieder
- derjenige Spieler, der nicht mehr ziehen kann verliert

$\exists$ Gewinnstrategie für Anna?

Komplexität

- Platzkomplexität: $O(n)$

wobei n Größe des Graphen darstellt

Übersicht

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, Automaten mit ϵ-Übergängen, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Algebraische Gesetze für reguläre Ausdrücke, Abgeschlossenheit regulärer Sprachen, Pumpinglemma, Minimierung

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turing Maschinen, Entscheidungsprobleme, Äquivalente Formulierungen, Universelle Maschinen und Diagonalisierung

Einführung in die Komplexitätstheorie, Laufzeitkomplexität, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Laufzeitkomplexität

Definition

sei M eine deterministische und totale TM

- die Laufzeitkomplexität von M ist Funktion $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
  T misst maximale Anzahl der Schritten (Konfigurationszüge)
  $\forall$ Eingaben der Länge n
- $T(n)$ is die Laufzeit von M
- M ist eine $T(n)$-Zeit Turingmaschine

Definition DTIME($T(n)$)

sei $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine numerische Funktion; die deterministische Zeitkomplexitätsklasse DTIME($T(n)$) ist definiert als:

$$\text{DTIME}(T(n)) = \{\text{L}(M) \mid M \text{ ist eine deterministische Mehrband-TM mit Laufzeit in } \text{O}(T(n))\ \}$$

Die Klassen P und NP

Beispiel

betrachte MAZE as Sprache:

$$\text{MAZE} = \{(G, s, t) \mid G \text{ Graph mit Weg von } s \text{ nach } t\}$$

es gilt MAZE $\in$ DTIME(n^2)

Definition P

$$\text{P} = \bigcup_{k \geqslant 1} \text{DTIME}(n^k)$$

Definition

- ein Verifikator einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist ein Algorithmus V:
  $$L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\ c, \text{sodass } V \text{ akzeptiert Eingabe } (x, c)\}$$
- ein Polynomzeit Verifikator ist Verifikator mit Laufzeit $\text{O}(n^k)$
  wobei $n = \ell(x)$; Wort c wird Zertifikat genannt

Definition NP

NP ist die Klasse der Sprachen, die einen Polynomzeit Verifikator haben

Beispiel

betrachte TSP als Sprache

$$\text{TSP} = \{(G, b, B) \mid \text{bewerteter Graph } G \text{ hat Hamiltonschen Kreis mit Bewertung } \leqslant B\ \}$$

TSP $\in$ NP

definieren einen Verifikator V für TSP mit Eingabe:

- (G, b, B) Instanz
- Kreis H Zertifikat

auf der Eingabe:
(i) prüfe ob H ein Hamiltonscher Kreis ist und Bewertung $\leqslant B$
(ii) wenn ja, akzeptiere, sonst verwerfe
V läuft in polynomieller Zeit

Definition

sei N eine nichtdeterministische und totale TM

- die Laufzeitkomplexität von N ist Funktion $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  T misst die maximale Anzahl von Schritten von N
  $\forall$ Eingaben der Länge n; auf jedem möglichen Berechnungspfad

Definition NTIME($T(n)$)

sei $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine numerische Funktion; die nichtdeterministische Zeitkomplexitätsklasse NTIME($T(n)$) ist definiert als:

$$\text{NTIME}(T(n)) = \{\text{L}(N) \mid N \text{ ist eine nichtdeterministische Mehrband-TM mit Laufzeit in } \text{O}(T(n))\ \}$$

Definition NP′

$$\text{NP}' = \bigcup_{k \geqslant 1} \text{NTIME}(n^k)$$

Beispiel
TSP $\in$ NP$'$

Lemma
wenn $L \in$ NP$'$, dann $L \in$ NP

Beweis
- sei $L \in$ NP$'$
- $\exists$ NTM N, sodass $L = \mathrm{L}(N)$
- N hat polynomielle nichtdeterministische Zeitkomplexität
- definiere einen PolynomZeit Verifikator V mit Eingabe (x, c)
  1. simuliere N auf x
  2. verwende Zertifikat um Nichtdeterminismus aufzulösen

  Algorithmus ist deterministisch
- wenn N akzeptiert, akzeptiert V, ansonsten verwerfe.

Lemma
wenn $L \in$ NP, dann $L \in$ NP$'$

Beweis
- sei V ein Verifikator für L
- V läuft in polynomieller Zeit, genauer in n^k
- definiere NTM N mit Eingabe x
  1. rate (nichtdeterministisch) String c mit $\ell(c) = n^k$
  2. simuliere V auf (x, c)
  3. wenn V akzeptiert, dann akzeptiert N, sonst verwerfe

  Algorithmus ist nichtdeterministisch

Satz
es gilt NP = NP$'$: die Klasse der Sprachen, die einen polytime Verifikator haben, ist gleich der Klasse von Sprachen, die durch eine NTM in polynomieller Zeit entschieden werden

Reduktionen in polynomieller Zeit

Definition
wenn
1. $\exists$ deterministische, totale TM T mit Eingabealphabet Σ und Bandalphabet Σ
2. T läuft in polynomieller Zeit
3. bei Eingabe $x \in \Sigma^*$, schreibt T $f(x)$ auf dem (ersten) Band

dann heißt $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ in polynomieller Zeit berechenbar

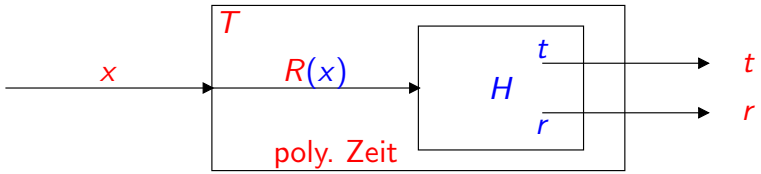
Definition $L \leqslant_m^{\mathrm{p}} M$
wenn
1. $\exists$ $R\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$
2. R berechenbar in polynomieller Zeit
3. für $L \subseteq \Sigma^*$, $M \subseteq \Sigma^*$ gilt $x \in L \iff R(x) \in M$

dann ist L auf M in polynomieller Zeit reduzierbar

Reduktionen im Bild

Angenommen
- L, M Sprachen über Σ
- $L \leqslant_m^{\mathrm{p}} M$ mit $R\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$
- die polynomielle Reduktion R wird von TM T berechnet

$$x \in L \iff R(x) \in M$$



Lemma
wenn $A \leqslant_m^{\mathrm{p}} B$ und $B \in$ P ($B \in$ NP), dann $A \in$ P ($A \in$ NP)

Definition $\leqslant_m^p$-hart

wenn

1. $\mathcal{C}$ eine beliebige Komplexitätsklasse
2. A eine Sprache über Σ und
3. $\forall$ Sprachen $B \in \mathcal{C}$ gilt: $B \leqslant_m^p A$

dann ist A $\leqslant_m^p$-hart für $\mathcal{C}$

Beispiel

TSP ist $\leqslant_m^p$-hart für NP

Definition

wenn

1. A $\leqslant_m^p$-hart für $\mathcal{C}$ und
2. $A \in \mathcal{C}$

dann ist A $\leqslant_m^p$-vollständig für $\mathcal{C}$ oder (kurz) $\mathcal{C}$-vollständig

NP-Vollständigkeit von TSP

Satz

TSP ist $\leqslant_m^p$-vollständig für NP

Konsequenz

- wenn $\exists$ polynomieller Algorithmus für TSP, dann
- $\exists$ polynomieller Algorithmus $\forall$ Probleme in NP

Beispiel MAZE

- MAZE $\in$ NP
- MAZE ist nicht hart für NP

Definition GG

- GG ist hart für NP
- GG $\notin$ NP

Speicherplatzkomplexität

Definition

sei M eine deterministische und totale TM

- die Speicherplatzkomplexität von M ist Funktion $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, S misst die maximale Anzahl von Bandfeldern die M liest $\forall$ Eingaben der Länge n
- $S(n)$ ist der Speicherplatz von M
- M ist eine $S(n)$-Platz Turingmaschine

Definition

sei M eine nichtdeterministische und totale TM

- die Speicherplatzkomplexität von M ist Funktion $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, S misst die maximale Anzahl von Bandfeldern die M liest $\forall$ Eingaben der Länge n; auf jedem möglichen Weg

Definition

sei $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine numerische Funktion

$$\text{DSPACE}(S(n)) = \{\text{L}(M) \mid M \text{ ist eine deterministische Mehrband-TM mit Speicherplatz in } \text{O}(S(n))\ \}$$

$$\text{NSPACE}(S(n)) = \{\text{L}(N) \mid N \text{ ist eine nichtdeterministische Mehrband-TM mit Speicherplatz in } \text{O}(S(n))\ \}$$

Definition

$$\text{PSPACE} = \bigcup_{k \geqslant 1} \text{DSPACE}(n^k) \qquad \text{NPSPACE} = \bigcup_{k \geqslant 1} \text{NSPACE}(n^k)$$

Beispiel

- GG ist $\leqslant_m^p$-vollständig für PSPACE

Satz

$$\text{P} \subseteq \text{NP} \subseteq \text{PSPACE} = \text{NPSPACE}$$