

# Diskrete Mathematik

Martin Avanzini   Arne Dür   Kurt Girstmair   Georg Moser

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK  
Sommersemester 2010



## Definition

sei  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ein DEA; die **Sprache**  $L(A)$  von  $A$ :

$$L(A) := \{x \mid \hat{\delta}(q_0, x) \in F\}$$

hier bezeichnet  $\hat{\delta}$  die Erweiterung von  $\delta$  auf Wörter

## Beispiel

definiere DEA  $A$ , der alle aus 0en und 1en bestehenden Zeichenketten akzeptiert, die die Folge 01 enthalten

$$L = \{x01y \mid x, y \text{ sind beliebige Zeichenketten aus 0en und 1en}\}$$

	0	1
$\rightarrow q_0$	$q_1$	$q_0$
$q_1$	$q_1$	$q_2$
$*q_2$	$q_2$	$q_2$

# Zusammenfassung der letzten LV

## Definition

DEA

ein **deterministischer endlicher Automat** besteht aus

- 1 einer endliche Menge  $Q$ , deren Elemente **Zustände** heißen
- 2 einer endliche Menge  $\Sigma$ , die **Eingabealphabet** heißt und deren Elemente **Eingabezeichen** genannt werden
- 3 einer Abbildung

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

die **Übergangsfunktion**

- 4 einem ausgezeichneten Zustand  $q_0$ ; der **Startzustand**
- 5 einer Teilmenge  $F \subseteq Q$ ; die **akzeptierenden Zustände**

die kompakteste Repräsentation eines DEA ist das Quintupel:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

## Übersicht

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, **(nicht)-deterministische endliche Automaten**, **Teilmengekonstruktion**, Automaten mit  $\epsilon$ -Übergängen, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Minimierung

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turing Maschinen, Äquivalente Formulierungen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Einführung in die Komplexitätstheorie, Laufzeitkomplexität, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

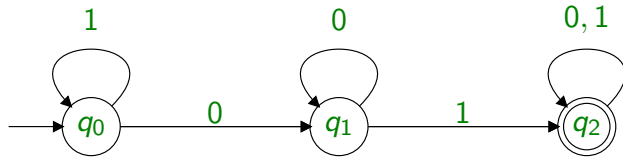
# Nichtdeterministische Endliche Automaten

## Aufgabe

Definiere Automaten, der alle Binärstrings akzeptiert, die in 01 enden

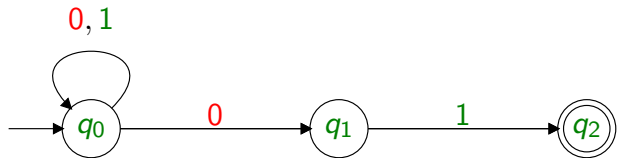
### Automat A

deterministisch

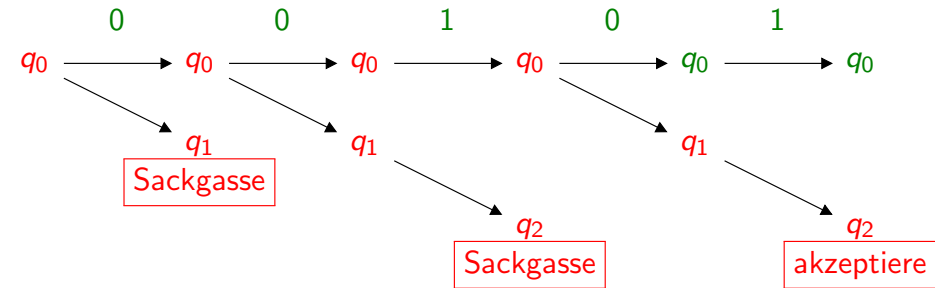
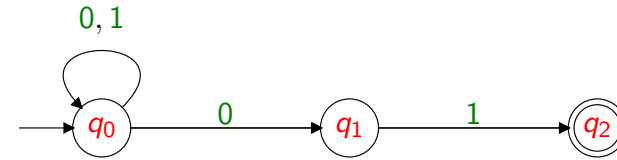


### Automat B

nicht-deterministisch



# Nichtdeterminismus



## Definition

NEA

Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat** ist gegeben durch

- 1 eine endliche Menge  $Q$ , deren Elemente **Zustände** heißen
- 2 eine endliche Menge  $\Sigma$ , die **Eingabealphabet** heißt und deren Elemente **Eingabezeichen** genannt werden,
- 3 eine Abbildung

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

die **Übergangsfunktion**

- 4 einen ausgezeichneten Zustand  $q_0$ ; den **Startzustand**
- 5 eine Teilmenge  $F \subseteq Q$ ; die **akzeptierenden Zustände**

## Repräsentation

kompakteste Repräsentation eines NEA ist das Quintupel:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

## Beispiel

### Alternative Repräsentation

definiere NEA

Automat B

$$B = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

mit

- 3  $\delta$  definiert durch folgende Zustandstafel:

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$q_1$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

$\delta$  die Übergangsfunktion eines NEA  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , dann definiere  $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$

**Definition**

1 **Basis**

$$\hat{\delta}(p, \epsilon) := \{p\}$$

2 **Schritt** sei  $x = ya$ ; angenommen  $\hat{\delta}(p, y) = \{q_1, \dots, q_k\}$  und

$$\bigcup_{i=1}^k \delta(q_i, a) = \{r_1, \dots, r_m\}$$

setze

$$\hat{\delta}(p, ya) = \{r_1, \dots, r_m\} = \bigcup_{q \in \hat{\delta}(p, y)} \delta(q, a)$$

**Definition**

die **Sprache** von NEA  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ :

$$L(N) := \{x \mid \hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset\}$$

$\hat{\delta}$

$L(N)$

**Teilmengenkonstruktion**

sei  $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$

konstruiere deterministische Automaten  $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$

Übrige Komponenten für  $D$ :

1  $Q_D$  ist die Menge aller Teilmengen von  $Q_N$

2 Zur Berechnung von  $\delta_D$  betrachten wir jede Teilmenge  $S \subseteq Q_N$  und jedes  $a \in \Sigma$

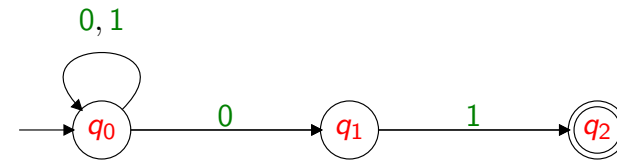
setze:

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$

3  $F_D$  ist definiert als die Menge

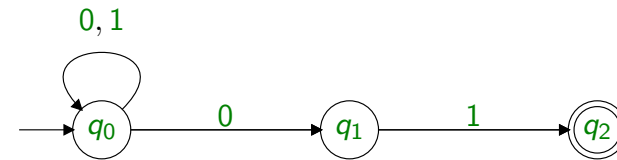
$$\{S \subseteq Q_N \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$$

**Beispiel**



- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

**Beispiel**



	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$* \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$* \{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

## Beispiel (2)

Wir schreiben den erhaltenen DEA um:

$\emptyset$	<b>A</b>	$\{q_0, q_1\}$	<b>E</b>
$\{q_0\}$	<b>B</b>	$\{q_0, q_2\}$	<b>F</b>
$\{q_1\}$	<b>C</b>	$\{q_1, q_2\}$	<b>G</b>
$\{q_2\}$	<b>D</b>	$\{q_0, q_1, q_2\}$	<b>H</b>

	0	1
A	A	A
→ B	E	B
C	A	D
*D	A	A
E	E	F
*F	E	B
*G	A	D
*H	E	F

## Definition

## Erreichbarkeit

definiere jene **Teilmengen von  $Q_N$** , die tatsächlich **erreichbar** sind:

- 1 Basis:** Sei  $q_0$  der Startzustand von  $N$   
Dann ist  $\{q_0\}$  erreichbar
- 2 Schritt:** Angenommen die Menge  $S$  ist erreichbar.  
Dann sind für jeden Eingabebuchstaben  $a$ , die Teilmengen  $\delta_D(S, a)$  erreichbar

	0	1	erreichbar
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	
→ $\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	✓
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	✓
* $\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	✓
* $\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	
* $\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	