Diskrete Mathematik

Martin Avanzini Arne Dür Kurt Girstmair Georg Moser

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK

Sommersemester 2010

Zusammenfassung der letzten LV

Definition NEA

ein nichtdeterministischer endlicher Automat besteht aus

1. einer endliche Menge Q, deren Elemente Zustände heißen
2. einer endliche Menge Σ, die Eingabealphabet heißt und deren Elemente Eingabezeichen genannt werden
3. einer Abbildung
$$\delta \colon Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$$
die Übergangsfunktion
4. einem ausgezeichneten Zustand q_0; der Startzustand
5. einer Teilmenge $F \subseteq Q$; die akzeptierenden Zustände

Erweiterte Übergangsfunktion

δ die Übergangsfunktion eines NEA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Definition $\widehat{\delta}$

1. Basis
$$\widehat{\delta}(p, \epsilon) := \{p\}$$
2. Schritt sei $x = ya$; setze
$$\widehat{\delta}(p, ya) = \bigcup_{q \in \widehat{\delta}(p,y)} \delta(q, a)$$

Definition $\mathrm{L}(N)$

die Sprache von NEA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:
$$\mathrm{L}(N) := \{x \mid \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing\}$$

Teilmengenkonstruktion

sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$

konstruiere deterministische Automaten $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$

Übrige Komponenten für D:

1. Q_D ist die Menge aller Teilmengen von Q_N
2. Zur Berechnung von δ_D betrachten wir jede Teilmenge $S \subseteq Q_N$ und jedes $a \in \Sigma$, wir definieren:
$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$
3. F_D ist definiert als die Menge
$$\{S \subseteq Q_N \mid S \cap F_N \neq \varnothing\}$$

Übersicht

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, Automaten mit ϵ-Übergängen, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Minimierung

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turing Maschinen, Äquivalente Formulierungen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Einführung in die Komplexitätstheorie, Laufzeitkomplexität, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Korrektheit der Teilmengenkonstruktion

Satz

Sei $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ der DEA, der mit der Teilmengen-konstruktion aus NEA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ konstruiert dann gilt $L(D) = L(N)$

Beweis

- wir beweisen mit Induktion über $\ell(x)$, für $x \in \Sigma^*$ beliebig, dass
$$\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \widehat{\delta}_N(q_0, x) \tag{1}$$
- daraus folgt die Behauptung — Definition $L(N), L(D)$
$$\begin{aligned} L(N) &= \{x \mid \widehat{\delta}_N(q_0, x) \cap F_N \neq \varnothing\} \\ &= \{x \mid \widehat{\delta}_D(\{q_0\}, x) \cap F_N \neq \varnothing\} \\ &= \{x \mid \widehat{\delta}_D(\{q_0\}, x) \in F_D\} = L(D) \ . \end{aligned}$$
- nun zeigen wir (1)

Basis: Definition $\widehat{\delta}_D, \widehat{\delta}_N$

Sei $\ell(x) = 0$, dh. $x = \epsilon$. Dann

$$\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, \epsilon) = \{q_0\} = \widehat{\delta}_N(q_0, \epsilon)$$

Schritt:

Sei $x = ya$. Nach Induktionshypothese gilt $\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, y) = \widehat{\delta}_N(q_0, y)$

Angenommen $\widehat{\delta}_N(q_0, y) = \{p_1, \ldots, p_k\}$

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, ya) &= \delta_D(\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, y), a) && \text{Definition } \widehat{\delta}_D \\
&= \delta_D(\widehat{\delta}_N(q_0, y), a) && \text{Induktionshypothese} \\
&= \delta_D(\{p_1, \ldots, p_k\}, a) && \text{Annahme} \\
&= \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a) && \text{Definition } \delta_D \\
&= \widehat{\delta}_N(q_0, ya) && \text{Definition } \widehat{\delta}_N \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Äquivalenz von NEA und DEA

Satz

Eine Sprache L wird genau dann von einem DEA akzeptiert, wenn L von einem NEA akzeptiert wird.

Beweis

- Wenn:

  Dieser Teil des Satzes folgt aus der Teilmengenkonstruktion
- Nur-dann-wenn:

  wir schreiben den gegebenen DEA in einen NEA um

  sei $D = (Q, \Sigma, \delta_D, q_0, F)$

  definiere $N = (Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$ mit

$$\text{Wenn } \delta_D(p, a) = q \quad \text{dann} \quad \delta_N(p, a) = \{q\}$$

$\blacksquare$

Fangzustand

Beobachtung

- sei N ein NEA mit $|\delta_N(q, a)| \leqslant 1$ für alle $q \in Q$ und alle $a \in \Sigma$
- wir führen einen neuen Zustand f, den Fangzustandes ein
- und erweiteren die Übergangsfunktion

$$\delta'(q, a) := \begin{cases} \delta_N(q, a) & \text{falls } q \in Q \ \text{ und } \ |\delta_N(q, a)| = 1 \\ \{f\} & \text{falls } (q \in Q \ \text{ und } \ |\delta_N(q, a)| = 0) \ \text{ oder } \ q = f \end{cases}$$

- wir erhalten einen NEA N', der dieselben Wörter wie N akzeptiert
- es is leicht einzusehen, dass der NEA N' äquivalent zu einem DEA ist

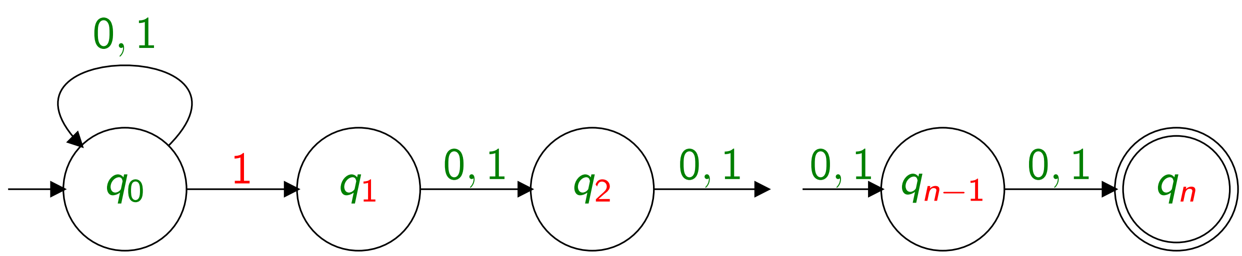
Konvention

in der Folge werden Automaten mit höchstens einem Folgezustand als deterministisch bezeichnet

Exponentieller Zuwachs

Beispiel

betrachte den folgenden NEA N:



- $\mathrm{L}(N) = \{x1y \mid \ell(y) = n - 1\}$
- Angenommen existiert DEA D, sodass $\mathrm{L}(D) = \{x1y \mid \ell(y) = n - 1\}$

  D muss sich die n letzten Symbole merken, bevor er akzeptieren kann
- dafür gibt es 2^n Möglichkeiten

  D muss also zumindest 2^n Zustände haben

Frage

definiere einen endlichen Automaten der die Sprache L der Dezimalzahlen akzeptiert, etwa $-0.7 \in \mathrm{L}$ oder $3.14159265 \in \mathrm{L}$

Lösung

$L = \mathrm{L}($`^[+-]?[([0-9]*\.[0-9]+)([0-9]+\.)]$`$)$

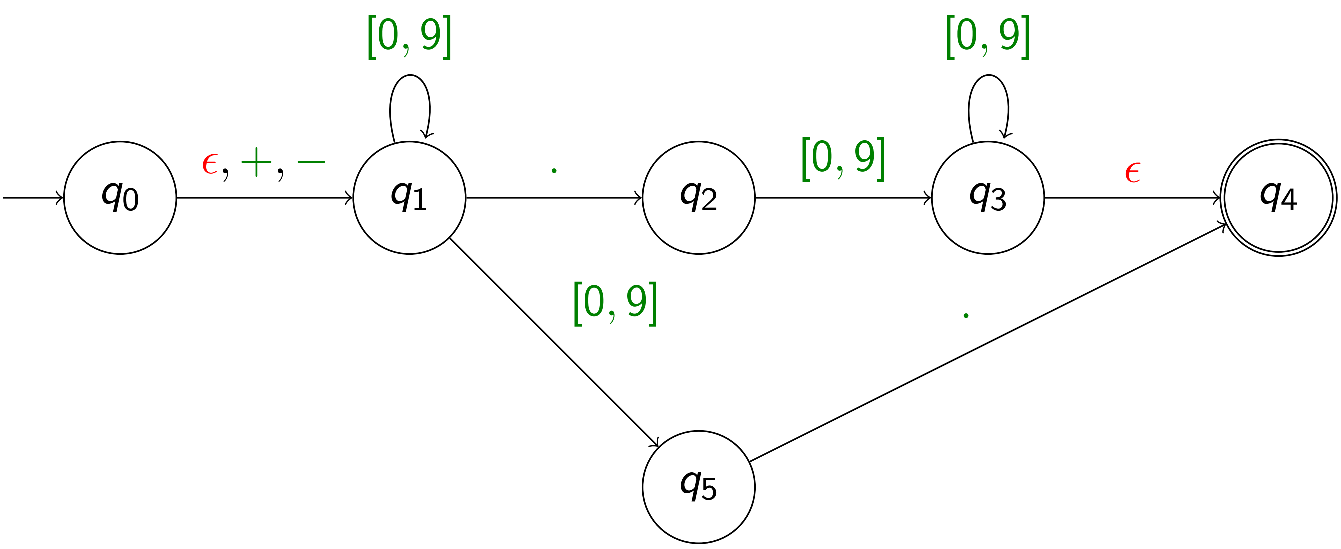
Beispiel

regulare Ausdrücke in Unix

`.`	bezeichnet jedes Zeichen
`\s`	steht für das Sonderzeichen s
`^`, `$`	bezeichnen Zeilenanfang, bzw. Zeilenende
$[a_1 a_2 \cdots a_k]$	bezeichnet $(a_1 + a_2 \cdots + a_k)$
$[x - y]$	alle ASCII Zeichen zwischen x und y.
?	heißt "keines oder eines"
+	bezeichnet "eines oder mehrere"
$*$	bezeichnet Kleene Stern
$R\{n\}$	"genau n Kopien" von R

Endliche Automaten mit Epsilon-Übergängen

Alternative Lösung



NEAs mit Epsilon-Übergängen

Ein ϵ-NEA ist gegeben durch

1. eine endliche Menge Q, deren Elemente Zustände heißen,
2. eine endliche Menge Σ, die Eingabealphabet heißt und deren Elemente Eingabezeichen genannt werden,
3. eine Abbildung
$$\delta\colon Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathcal{P}(Q)$$
die Übergangsfunktion heißt und angibt, wie sich der Zustand des Automaten bei einer Eingabe ändern kann.
4. einen ausgezeichneten Zustand, der Startzustand genannt wird,
5. eine Teilmenge $F \subseteq Q$, deren Elemente akzeptierende Zustände genannt werden.

Um Verwechslungen auszuschließen, fordern wir dass $\epsilon \notin \Sigma$

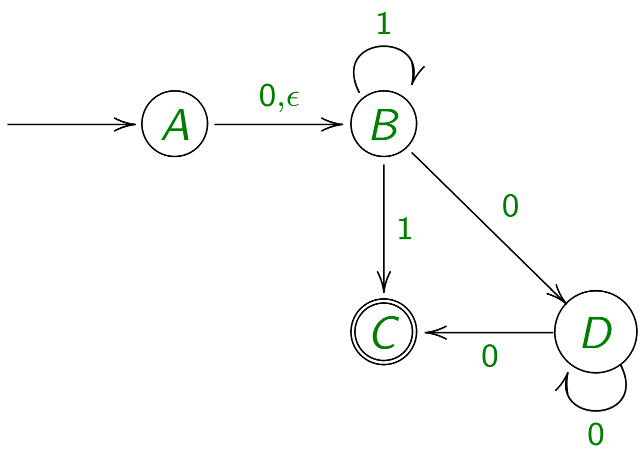
Beispiel

Ein ϵ-NEA E sei gegeben durch

$$\Sigma = \{0, 1\} \quad , \quad Q = \{A, B, C, D\} \quad , \quad q_0 = A \quad , \quad F = \{C\}$$

δ laut folgender Tabelle/Zustandsgraphen:

	0	1	ϵ
A	$\{B\}$	$\varnothing$	$\{B\}$
B	$\{D\}$	$\{B, C\}$	$\varnothing$
C	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
D	$\{C, D\}$	$\varnothing$	$\varnothing$



Epsilon-Hülle

Definition

ϵ-Hülle

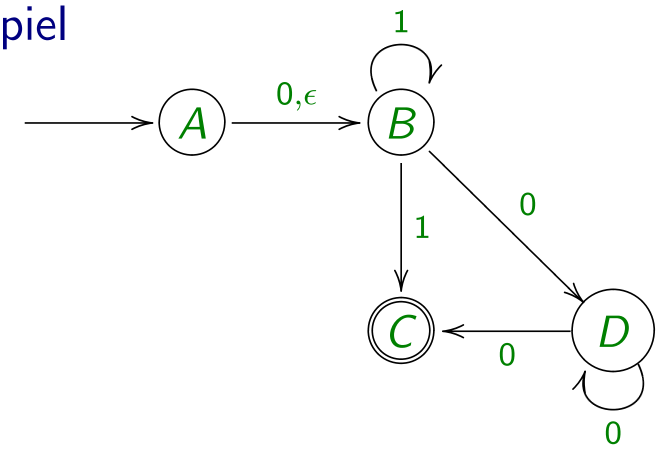
1. Basis

$$\{q\} \subseteq \epsilon\text{-Hülle}(q)$$

2. Schritt
   wenn $p \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$ und δ die Übergangsfunktion, dann

$$\delta(p, \epsilon) \subseteq \epsilon\text{-Hülle}(q)$$

Beispiel



1. Basis: $A \in \epsilon\text{-Hülle}(A)$
2. Schritt: $B \in \epsilon\text{-Hülle}(A)$

also $\epsilon\text{-Hülle}(A) = \{A, B\}$

Alternative Definition

Definition

Nachfolgersuche

Betrachte den (gerichteten) Zustandsgraphen des Automaten, setze $S = \{q\}$ und betrachte nur die mit ϵ marktierten Kanten

der folgende Algorithmus markiert alle Zustände in $\epsilon\text{-Hülle}(q)$:

1. Markiere die Zustände in S
2. Solange $S \neq \varnothing$, wiederhole:
   - Wähle einen Zustand p aus S und entferne p
   - Bestimme alle unmarkierten Nachfolger von p die mit einer ϵ-Kante erreichbar sind
   - markiere diese und füge sie zu S hinzu

Beispiel

betrache ϵ-NEA E:

$\epsilon\text{-Hülle}(A) = \{A, B\}$ $\epsilon\text{-Hülle}(B) = \{B\}$

$\epsilon\text{-Hülle}(C) = \{C\}$ $\epsilon\text{-Hülle}(D) = \{D\}$

Sei δ die Übergangsfunktion eines ϵ-NEA

Definition

$\widehat{\delta}$

1. Basis:

$$\widehat{\delta}(q, \epsilon) := \epsilon\text{-Hülle}(q)$$

2. Schritt. Sei $x = ya$. Angenommen $\widehat{\delta}(q, y) = \{p_1, \ldots, p_k\}$ und

$$\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, \ldots, r_m\}$$

Dann setze

$$\widehat{\delta}(q, ya) = \bigcup_{j=1}^{m} \epsilon\text{-Hülle}(r_j)$$

Definition

$L(E)$

die Sprache von ϵ-NEA $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

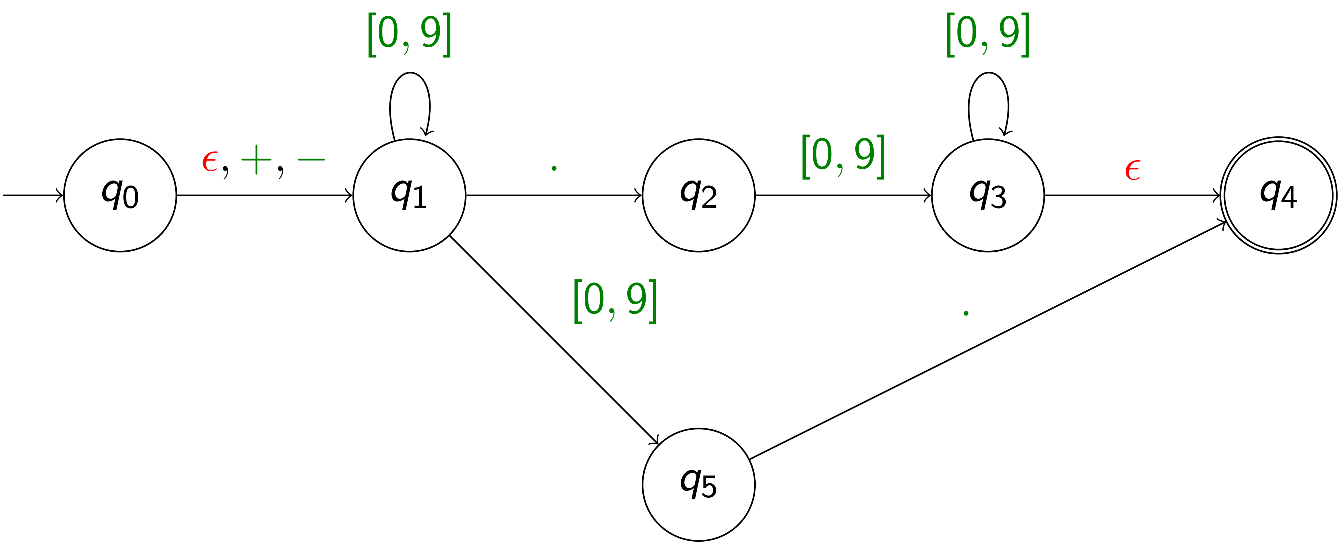
$$L(E) := \{x \mid \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing\}$$

Beispiel (1)

Ein ϵ-NEA A sei gegeben durch

$\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9, +, -, \cdot\}$ $\quad Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ $\quad F = \{q_4\}$

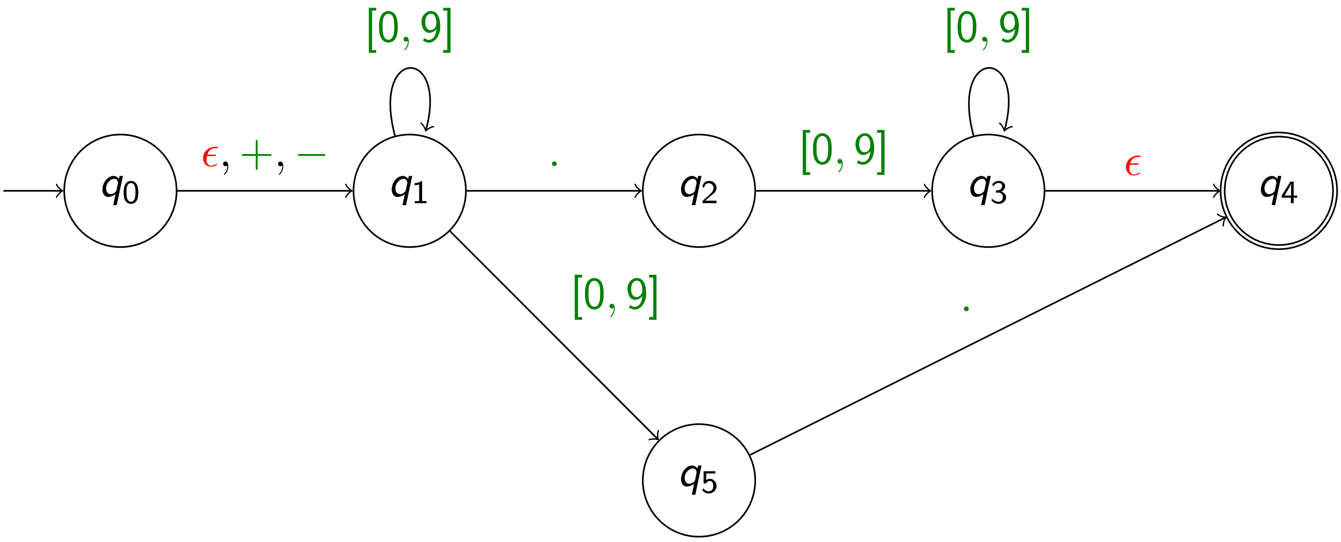
und δ wie folgt definiert:



Sprache $L(E) = L$, also die gesuchte Sprache der Dezimalzahlen

Beispiel (2)

betrachte den Automaten A:



$$\epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0, q_1\} \qquad \epsilon\text{-Hülle}(q_1) = \{q_1\} \qquad \epsilon\text{-Hülle}(q_2) = \{q_2\}$$

$$\epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_4\} \qquad \epsilon\text{-Hülle}(q_4) = \{q_4\} \qquad \epsilon\text{-Hülle}(q_5) = \{q_5\}$$