

Diskrete Mathematik

Martin Avanzini Arne Dür Kurt Girstmair Georg Moser

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2010



Erweiterte Übergangsfunktion

δ die Übergangsfunktion eines NEA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Definition

1 **Basis**

$$\widehat{\delta}(p, \epsilon) := \{p\}$$

2 **Schritt** sei $x = ya$; setze

$$\widehat{\delta}(p, ya) = \bigcup_{q \in \widehat{\delta}(p, y)} \delta(q, a)$$

Definition

die **Sprache** von NEA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

$$L(N) := \{x \mid \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset\}$$

 $\widehat{\delta}$
 $L(N)$

Zusammenfassung der letzten LV

NEA

Definition

ein **nichtdeterministischer endlicher Automat** besteht aus

- 1** einer endliche Menge Q , deren Elemente Zustände heißen
- 2** einer endliche Menge Σ , die Eingabealphabet heißt und deren Elemente Eingabezeichen genannt werden
- 3** einer Abbildung

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

die **Übergangsfunktion**

- 4** einem ausgezeichneten Zustand q_0 ; der Startzustand
- 5** einer Teilmenge $F \subseteq Q$; die akzeptierenden Zustände

Teilmengenkonstruktion

sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$

konstruiere deterministische Automaten $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$

Übrige Komponenten für D :

- 1** Q_D ist die Menge aller Teilmengen von Q_N
- 2** Zur Berechnung von δ_D betrachten wir jede Teilmenge $S \subseteq Q_N$ und jedes $a \in \Sigma$, wir definieren:

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$

- 3** F_D ist definiert als die Menge

$$\{S \subseteq Q_N \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$$

Übersicht

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, **Teilmengenkonstruktion**, **Automaten mit ϵ -Übergängen**, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Minimierung

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turing Maschinen, Äquivalente Formulierungen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Einführung in die Komplexitätstheorie, Laufzeitkomplexität, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Basis:

Definition $\widehat{\delta}_D, \widehat{\delta}_N$

Sei $\ell(x) = 0$, dh. $x = \epsilon$. Dann

$$\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, \epsilon) = \{q_0\} = \widehat{\delta}_N(q_0, \epsilon)$$

Schritt:

Sei $x = ya$. Nach Induktionshypothese gilt $\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, y) = \widehat{\delta}_N(q_0, y)$

Angenommen $\widehat{\delta}_N(q_0, y) = \{p_1, \dots, p_k\}$

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_D(\{q_0\}, ya) &= \delta_D(\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, y), a) && \text{Definition } \widehat{\delta}_D \\ &= \delta_D(\widehat{\delta}_N(q_0, y), a) && \text{Induktionshypothese} \\ &= \delta_D(\{p_1, \dots, p_k\}, a) && \text{Annahme} \\ &= \bigcup_{i=1}^k \delta_N(p_i, a) && \text{Definition } \delta_D \\ &= \widehat{\delta}_N(q_0, ya) && \text{Definition } \widehat{\delta}_N \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Korrektheit der Teilmengenkonstruktion

Satz

Sei $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ der DEA, der mit der Teilmengenkonstruktion aus NEA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ konstruiert dann gilt $L(D) = L(N)$

Beweis

- wir beweisen mit Induktion über $\ell(x)$, für $x \in \Sigma^*$ beliebig, dass

$$\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \widehat{\delta}_N(q_0, x) \quad (1)$$

- daraus folgt die Behauptung Definition $L(N), L(D)$

$$\begin{aligned} L(N) &= \{x \mid \widehat{\delta}_N(q_0, x) \cap F_N \neq \emptyset\} \\ &= \{x \mid \widehat{\delta}_D(\{q_0\}, x) \cap F_N \neq \emptyset\} \\ &= \{x \mid \widehat{\delta}_D(\{q_0\}, x) \in F_D\} = L(D). \end{aligned}$$

- nun zeigen wir (1)

Äquivalenz von NEA und DEA

Satz

Eine Sprache L wird **genau dann** von einem DEA akzeptiert, **wenn** L von einem NEA akzeptiert wird.

Beweis

- Wenn:**
Dieser Teil des Satzes folgt aus der **Teilmengenkonstruktion**

- Nur-dann-wenn:**

wir schreiben den gegebenen DEA in einen NEA um

sei $D = (Q, \Sigma, \delta_D, q_0, F)$

definiere $N = (Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$ mit

$$\text{Wenn } \delta_D(p, a) = q \quad \text{dann} \quad \delta_N(p, a) = \{q\}$$



Fangzustand

Beobachtung

- sei N ein NEA mit $|\delta_N(q, a)| \leq 1$ für alle $q \in Q$ und alle $a \in \Sigma$
- wir führen einen neuen Zustand f , den **Fangzustand** ein
- und erweitern die Übergangsfunktion

$$\delta'(q, a) := \begin{cases} \delta_N(q, a) & \text{falls } q \in Q \text{ und } |\delta_N(q, a)| = 1 \\ \{f\} & \text{falls } (q \in Q \text{ und } |\delta_N(q, a)| = 0) \text{ oder } q = f \end{cases}$$

- wir erhalten einen NEA N' , der dieselben Wörter wie N akzeptiert
- es ist leicht einzusehen, dass der NEA N' äquivalent zu einem DEA ist

Konvention

in der Folge werden Automaten mit höchstens einem Folgezustand als **deterministisch** bezeichnet

Frage

definiere einen endlichen Automaten der die Sprache L der Dezimalzahlen akzeptiert, etwa $-0.7 \in L$ oder $3.14159265 \in L$

Lösung

$$L = L(\sim[+-]?[([0-9]*\.[0-9]+)([0-9]+\.)])\$)$$

Beispiel

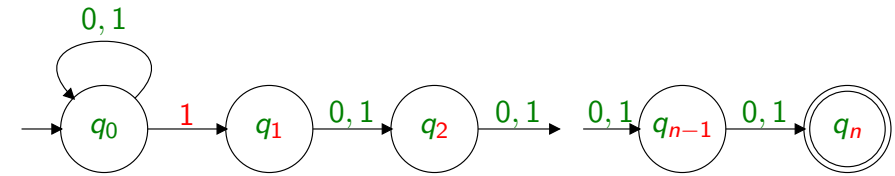
reguläre Ausdrücke in Unix

- bezeichnet jedes Zeichen
- $\backslash s$ steht für das Sonderzeichen s
- $\sim, \$$ bezeichnen Zeilenanfang, bzw. Zeilenende
- $[a_1 a_2 \dots a_k]$ bezeichnet $(a_1 + a_2 \dots + a_k)$
- $[x - y]$ alle ASCII Zeichen zwischen x und y .
- $?$ heißt "keines oder eines"
- $+$ bezeichnet "eines oder mehrere"
- $*$ bezeichnet Kleene Stern
- $R\{n\}$ "genau n Kopien" von R

Exponentieller Zuwachs

Beispiel

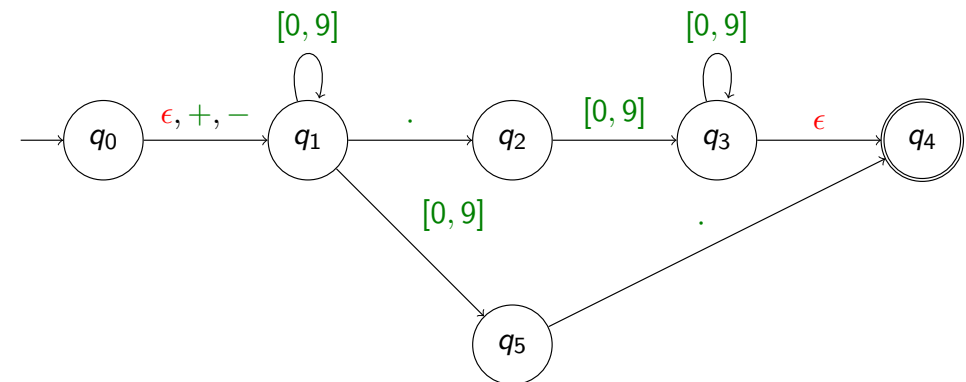
betrachte den folgenden NEA N :



- $L(N) = \{x1y \mid \ell(y) = n - 1\}$
- Angenommen existiert DEA D , sodass $L(D) = \{x1y \mid \ell(y) = n - 1\}$
 D muss sich die n letzten Symbole merken, bevor er akzeptieren kann
- dafür gibt es 2^n Möglichkeiten
 D muss also zumindest 2^n Zustände haben

Endliche Automaten mit Epsilon-Übergängen

Alternative Lösung



NEAs mit Epsilon-Übergängen

Ein ϵ -NEA ist gegeben durch

- 1 eine endliche Menge Q , deren Elemente **Zustände** heißen,
- 2 eine endliche Menge Σ , die **Eingabealphabet** heißt und deren Elemente **Eingabezeichen** genannt werden,
- 3 eine Abbildung

$$\delta: Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

die **Übergangsfunktion** heißt und angibt, wie sich der Zustand des Automaten bei einer Eingabe ändern kann.

- 4 einen ausgezeichneten Zustand, der **Startzustand** genannt wird,
- 5 eine Teilmenge $F \subseteq Q$, deren Elemente **akzeptierende Zustände** genannt werden.

Um Verwechslungen auszuschließen, fordern wir dass $\epsilon \notin \Sigma$

Epsilon-Hülle

Definition

- 1 **Basis**

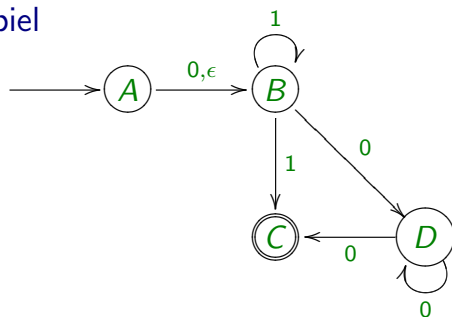
$$\{q\} \subseteq \epsilon\text{-Hülle}(q)$$

- 2 **Schritt**

wenn $p \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$ und δ die Übergangsfunktion, dann

$$\delta(p, \epsilon) \subseteq \epsilon\text{-Hülle}(q)$$

Beispiel



1 **Basis:** $A \in \epsilon\text{-Hülle}(A)$

2 **Schritt:** $B \in \epsilon\text{-Hülle}(A)$

also $\epsilon\text{-Hülle}(A) = \{A, B\}$

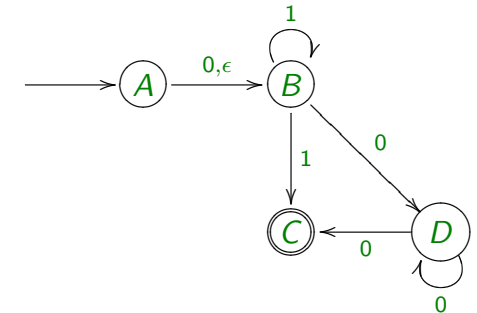
Beispiel

Ein ϵ -NEA E sei gegeben durch

$$\Sigma = \{0, 1\} \quad , \quad Q = \{A, B, C, D\} \quad , \quad q_0 = A \quad , \quad F = \{C\}$$

δ laut folgender Tabelle/Zustandsgraphen:

	0	1	ϵ
A	{B}	\emptyset	{B}
B	{D}	{B, C}	\emptyset
C	\emptyset	\emptyset	\emptyset
D	{C, D}	\emptyset	\emptyset



Alternative Definition

Definition

Nachfolgersuche

Betrachte den (gerichteten) Zustandsgraphen des Automaten, setze $S = \{q\}$ und betrachte nur die mit ϵ markierten Kanten

der folgende Algorithmus markiert alle Zustände in $\epsilon\text{-Hülle}(q)$:

- 1 Markiere die Zustände in S
- 2 Solange $S \neq \emptyset$, wiederhole:
 - Wähle einen Zustand p aus S und entferne p
 - Bestimme alle unmarkierten Nachfolger von p die **mit einer ϵ -Kante erreichbar sind**
 - markiere diese und füge sie zu S hinzu

Beispiel

betrache ϵ -NEA E :

$$\epsilon\text{-Hülle}(A) = \{A, B\}$$

$$\epsilon\text{-Hülle}(B) = \{B\}$$

$$\epsilon\text{-Hülle}(C) = \{C\}$$

$$\epsilon\text{-Hülle}(D) = \{D\}$$

Sei δ die Übergangsfunktion eines ϵ -NEA

Definition

1 Basis:

$$\widehat{\delta}(q, \epsilon) := \epsilon\text{-Hülle}(q)$$

2 Schritt. Sei $x = ya$. Angenommen $\widehat{\delta}(q, y) = \{p_1, \dots, p_k\}$ und

$$\bigcup_{i=1}^k \delta(p_i, a) = \{r_1, \dots, r_m\}$$

Dann setze

$$\widehat{\delta}(q, ya) = \bigcup_{j=1}^m \epsilon\text{-Hülle}(r_j)$$

Definition

die Sprache von ϵ -NEA $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

$$L(E) := \{x \mid \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset\}$$

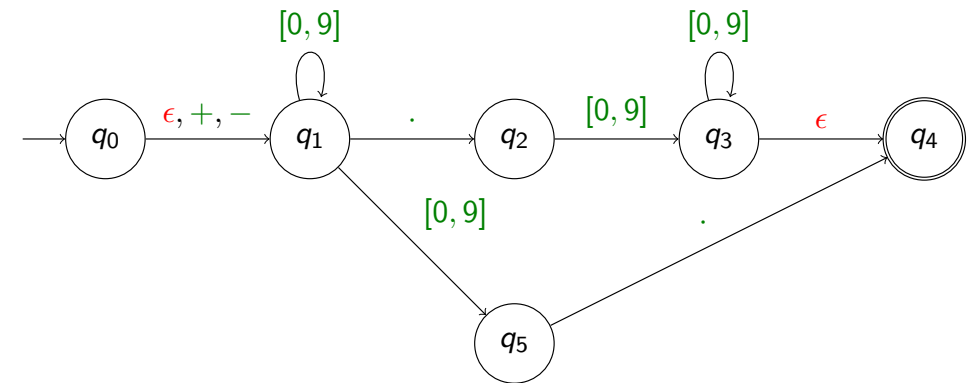
 $\widehat{\delta}$ $L(E)$

Beispiel (1)

Ein ϵ -NEA A sei gegeben durch

$$\Sigma = \{0, 1, \dots, 9, +, -, \cdot\} \quad Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\} \quad F = \{q_4\}$$

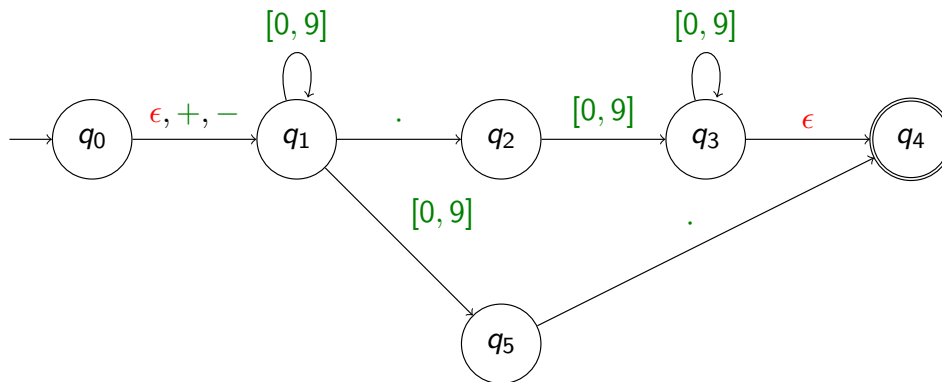
und δ wie folgt definiert:



Sprache $L(E) = L$, also die gesuchte Sprache der Dezimalzahlen

Beispiel (2)

betrachte den Automaten A :



$$\epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0, q_1\} \quad \epsilon\text{-Hülle}(q_1) = \{q_1\} \quad \epsilon\text{-Hülle}(q_2) = \{q_2\}$$

$$\epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_4\} \quad \epsilon\text{-Hülle}(q_4) = \{q_4\} \quad \epsilon\text{-Hülle}(q_5) = \{q_5\}$$