

Diskrete Mathematik

Martin Avanzini Arne Dür Christoph Kollreider Georg Moser

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2010



Zusammenfassung der letzten LV

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen

- unter Vereinigung
- unter Schnitt
- unter Komplement
- unter Mengendifferenz
- unter Abschluss (unter Kleene Stern)
- ...

Übersicht

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, Automaten mit ϵ -Übergängen, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Algebraische Gesetze für reguläre Ausdrücke, **Pumpinglemma**, Minimierung

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turing Maschinen, Äquivalente Formulierungen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Einführung in die Komplexitätstheorie, Laufzeitkomplexität, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Erinnerung: Ausdruckstärke regulärer Sprachen

Beispiel

Programmiersprachen

```
<expression> ::= <unconditional expression>
```

```
| if <condition> then <expression> fi
```

```
| <expression> <expression>
```

Frage

Durch regulären Ausdruck beschreibbar?

Antwort

Nein

Pumpinglemma (Schleifenlemma)

Wie zeigen wir, dass die genannte Programmiersprache **nicht regulär** ist ?

Satz

1 sei L eine **reguläre Sprache**

2 dann \exists eine Konstante n

und \forall Wörter $w \in L$, mit $\ell(w) \geq n$ gilt

\exists Wörter x, y, z mit

$$w = xyz$$

wobei

- $y \neq \epsilon$,
- $\ell(xy) \leq n$

sodass $\forall k \geq 0$

$$x(y)^k z \in L$$

Beweis

angenommen L ist regulär

dann \exists DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit n Zuständen, sodass $L = L(A)$

• sei

$$w = a_1 \cdots a_m \quad m \geq n$$

• definiere

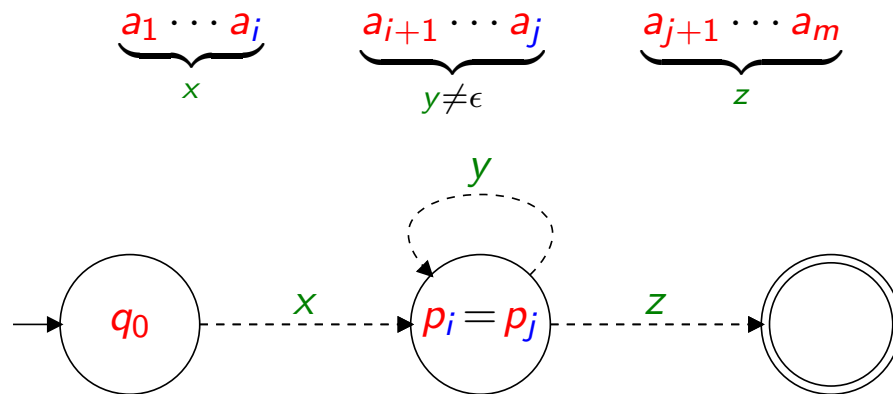
$$p_i = \widehat{\delta}(q_0, a_1 \cdots a_i)$$

p_i ist der Zustand von A nach dem Lesen von i Symbolen von w ;
beachte $p_0 = q_0$

- betrachte die $n + 1$ p_i ($i \in \{0, \dots, n\}$)
- diese können nicht alle verschieden sein, denn es gibt nur n Zustände
- \exists Indices i, j , sodass

$$p_i = p_j \quad i < j$$

- zerlege w :



- um das Wort

$$x(y)^k z$$

zu akzeptieren, läuft der Automat k -mal durch den Weg im Automaten A , der p_i mit p_j verbindet

- da $p_i = p_j$ ist dies beliebig oft möglich

Anwendung des Pumpinglemma

Beobachtung

Man verwendet das Pumpinglemma um zu zeigen, dass eine bestimmte Sprache L **nicht regulär** ist

Satz

Kontraposition des Pumpinglemma

Angenommen

1 $\forall n$

2 \exists ein String $w \in L$ mit $\ell(w) \geq n$ und

3 \forall Zerlegung von w in x , y und z mit

$$w = xyz$$

- $y \neq \epsilon$,
- $\ell(xy) \leq n$,

4 $\exists k$ mit $x(y)^k z \notin L$

dann ist L **nicht regulär**.

Beispiel

betrachte die Sprache L die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

wir zeigen die Annahmen der Kontraposition des Pumpinglemmas:

1 sei n beliebig

2 wir wählen Primzahl

$$p \geq n + 2 \geq n$$

und setzen $w = 1^p$; dann gilt $\ell(w) \geq n$ und $w \in L$

3 zerlege w in beliebige x, y und z mit

- $y \neq \epsilon$ und
- $\ell(xy) \leq n$

4 sei $\ell(y) = m$; also $\ell(xz) = p - m$; setze $k := (p - m)$, wir behaupten:

$$x(y)^{(p-m)}z \notin L$$

Behauptung $x(y)^{(p-m)}z \notin L$

Beweis (der Behauptung)

• es gilt:

$$\ell(x(y)^{(p-m)}z) = \overbrace{(p-m)}^{\ell(xz)} + \overbrace{m \cdot (p-m)}^{\ell((y)^k)} = (p-m) \cdot (m+1)$$

- wir sind fertig, wenn: $(p-m) \neq 1$ und $(m+1) \neq 1$
- aber $(m+1) \neq 1$, da $m = \ell(y)$ und $y \neq \epsilon$
- und $(p-m) \neq 1$, da

$$m = \ell(y) \leq \ell(xy) \leq n < n+2 \leq p$$

also

$$(p-m) \geq n+2-m \geq n+2-n \geq 2$$



Beweis (der Anwendung des Pumpinglemmas)

- Annahme der Kontraposition des Pumpinglemmas sind erfüllt
- Sprache L ist nicht regulär



Pumpinglemma als Spiel

Beobachtung

Kontraposition des Pumpinglemma können wir als 2-Personen-Spiel formulieren; Spielerin 1 gewinnt, wenn die gewählte Sprache L nicht regulär

Definition

Kontraposition des Pumpinglemma

- 1 Spieler 2 wählt ein beliebiges n
- 2 Spielerin 1 wählt ein Wort $w \in L$, $\ell(w) \geq n$
- 3 Spieler 2 zerlegt w in 3 Teile x, y, z , sodass $\ell(xy) \leq n$, $y \neq \epsilon$
- 4 Spielerin 1 gewinnt, wenn sie ein k wählen kann, sodass $x(y)^k z \notin L$

Satz

L ist genau dann nicht regulär, wenn die Spielerin 1 bei allen gültigen Spielzügen gewinnt

Beispiel

die Sprache L der richtig geklammerten Ausdrücke ist nicht regulär:

$$((())) \in L \quad (()) () \in L \quad (() \notin L \quad (()) () \notin L$$

Beispiel (fortgesetzt)

Es spielen Zenzi (Spielerin 1) und Sepp (Spieler 2)

- 1 Sepp wählt als Zahl n
- 2 Zenzi wählt daraufhin das Wort $w = ({}^n)^n$, welches in L ist
- 3 Sepp zerlegt w beliebig in x , y und z
Er muss darauf achten, dass $\ell(xy) \leq n$ und $y \neq \epsilon$
- 4 Zenzi kennt die Zerlegung nicht, trotzdem kann sie aus den Bedingungen und der Kenntnis von w darauf schließen, dass $xy = ({}^i$ für $i \leq n$; sie wählt für $k = 0$

Zenzi gewinnt: in xz fehlt eine öffnende Klammer $($, obwohl xz noch dieselbe Anzahl an schließenden Klammern hat

Beispiel

die Sprache L der Wörter, die genauso viele 0en wie 1er enthalten ist nicht regulär

(an der Tafel)

Beispiel

sei M die Sprache über $\{0, 1\}$, deren Worte eine **ungleiche** Anzahl von 0en und 1en enthalten

Frage

Wie zeigt man, dass M nicht regulär ist?

Problem

- 1 sei n beliebig
- 2 wähle $w \in L$, sodass $\ell(w) \geq n$
- 3 $\forall x, y, z$ mit $w = xyz$ mit
 - $y \neq \epsilon$
 - $\ell(xy) \leq n$
- 4 finde k ; sodass $x(y)^k z \notin L$

Was tun, wenn die Anzahl von 0en und 1en in y gleich?

Antwort

Abschlusseigenschaften nutzen