Diskrete Mathematik

Martin Avanzini Arne Dür Christoph Kollreider Georg Moser

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK

Sommersemester 2010

Zusammenfassung der letzten LV

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen

- unter Vereinigung
- unter Schnitt
- unter Komplement
- unter Mengendifferenz
- unter Abschluss (unter Kleene Stern)
- ...

Übersicht

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, Automaten mit ϵ-Übergängen, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Algebraische Gesetze für reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turing Maschinen, Äquivalente Formulierungen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Einführung in die Komplexitätstheorie, Laufzeitkomplexität, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Erinnerung: Ausdrucksstärke regulärer Sprachen

Beispiel Programmiersprachen

```
<expression> ::= <unconditional expression>

  | if <condition> then <expression> fi

  | <expression> <expression>
```

Frage

Durch regulären Ausdruck beschreibbar?

Antwort

Nein

Pumpinglemma (Schleifenlemma)

Wie zeigen wir, dass die genannte Programmiersprache nicht regulär ist ?

Satz

1. sei L eine reguläre Sprache
2. dann $\exists$ eine Konstante n

   und $\forall$ Wörter $w \in L$, mit $\ell(w) \geqslant n$ gilt

   $\exists$ Wörter x, y, z mit

$$w = xyz$$

   wobei
   - $y \neq \epsilon$,
   - $\ell(xy) \leqslant n$

   sodass $\forall$ $k \geqslant 0$

$$x(y)^k z \in L$$

Beweis

angenommen L ist regulär
dann $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit n Zuständen, sodass $L = \mathrm{L}(A)$

- sei

$$w = a_1 \cdots a_m \qquad m \geqslant n$$

- definiere

$$p_i = \widehat{\delta}(q_0, a_1 \cdots a_i)$$

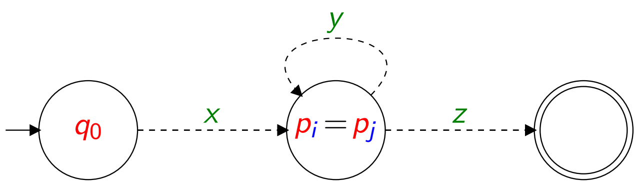
p_i ist der Zustand von A nach dem Lesen von i Symbolen von w;
beachte $p_0 = q_0$

- betrachte die $n+1$ p_i $\qquad (i \in \{0, \ldots, n\})$
- diese können nicht alle verschieden sein, denn es gibt nur n Zustände
- $\exists$ Indices i, j, sodass

$$p_i = p_j \qquad i < j$$

- zerlege w:

$$\underbrace{a_1 \cdots a_i}_{x} \qquad \underbrace{a_{i+1} \cdots a_j}_{y \neq \epsilon} \qquad \underbrace{a_{j+1} \cdots a_m}_{z}$$



- um das Wort

$$x(y)^k z$$

  zu akzeptieren, läuft der Automat k-mal durch den Weg im Automat A, der p_i mit p_j verbindet
- da $p_i = p_j$ ist dies beliebig oft möglich ■

Anwendung des Pumpinglemma

Beobachtung

Man verwendet das Pumpinglemma um zu zeigen, dass eine bestimmte Sprache L nicht regulär ist

Satz — Kontraposition des Pumpinglemma

Angenommen

1. $\forall$ n
2. $\exists$ ein String $w \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$ und
3. $\forall$ Zerlegung von w in x, y und z mit $\qquad w = xyz$
   - $y \neq \epsilon$,
   - $\ell(xy) \leqslant n$,
4. $\exists$ k mit $x(y)^k z \notin L$

dann ist L nicht regulär.

Beispiel

betrachte die Sprache L die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

wir zeigen die Annahmen der Kontraposition des Pumpinglemmas:

1. sei n beliebig
2. wir wählen Primzahl
$$p \geqslant n+2 \geqslant n$$
und setzen $w = 1^p$; dann gilt $\ell(w) \geqslant n$ und $w \in L$
3. zerlege w in beliebige x,y und z mit
   - $y \neq \epsilon$ und
   - $\ell(xy) \leqslant n$
4. sei $\ell(y) = m$; also $\ell(xz) = p - m$; setze $k := (p - m)$, wir behaupten:
$$x(y)^{(p-m)}z \notin L$$

Behauptung $x(y)^{(p-m)}z \notin L$

Beweis (der Behauptung)

- es gilt:
$$\ell(x(y)^{(p-m)}z) = \overbrace{(p-m)}^{\ell(xz)} + \overbrace{m \cdot (p-m)}^{\ell((y)^k)} = (p-m) \cdot (m+1)$$
- wir sind fertig, wenn: $(p - m) \neq 1$ und $(m + 1) \neq 1$
- aber $(m + 1) \neq 1$, da $m = \ell(y)$ und $y \neq \epsilon$
- und $(p - m) \neq 1$, da
$$m = \ell(y) \leqslant \ell(xy) \leqslant n < n+2 \leqslant p$$
also
$$(p-m) \geqslant n+2-m \geqslant n+2-n \geqslant 2$$

∎

Beweis (der Anwendung des Pumpinglemmas)

- Annahme der Kontraposition des Pumpinglemmas sind erfüllt
- Sprache L ist nicht regulär ∎

Pumpinglemma als Spiel

Beobachtung

Kontrapostion des Pumpinglemma können wir als 2-Personen-Spiel formulieren; Spielerin 1 gewinnt, wenn die gewählte Sprache L nicht regulär

Definition Kontraposition des Pumpinglemma

1. Spieler 2 wählt ein beliebiges n
2. Spielerin 1 wählt ein Wort $w \in L$, $\ell(w) \geqslant n$
3. Spieler 2 zerlegt w in 3 Teile x,y,z, sodass $\ell(xy) \leqslant n$, $y \neq \epsilon$
4. Spielerin 1 gewinnt, wenn sie ein k wählen kann, sodass $x(y)^k z \notin L$

Satz

L ist genau dann nicht regulär, wenn die Spielerin 1 bei allen gültigen Spielzügen gewinnt

Beispiel

die Sprache L der richtig geklammerten Ausdrücke ist nicht regulär:

$$((())) \in L \qquad (()())() \in L \qquad (() \notin L \qquad (()))() \notin L$$

Beispiel (fortgesetzt)

Es spielen Zenzi (Spielerin 1) und Sepp (Spieler 2)

1. Sepp wählt als Zahl n
2. Zenzi wählt daraufhin das Wort $w = (^n)^n$, welches in L ist
3. Sepp zerlegt w beliebig in x, y und z
Er muss darauf achten, dass $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$
4. Zenzi kennt die Zerlegung nicht, trotzdem kann sie aus den Bedingungen und der Kenntnis von w darauf schließen, dass $xy = (^i$ für $i \leqslant n$; sie wählt für $k = 0$

Zenzi gewinnt: in xz fehlt eine öffnende Klammer (, obwohl xz noch dieselbe Anzahl an schließenden Klammern hat

Beispiel

die Sprache L der Wörter, die genauso viele 0en wie 1er enthalten ist nicht regulär

(an der Tafel)

Beispiel

sei M die Sprache über $\{0, 1\}$, deren Worte eine ungleiche Anzahl von 0en und 1en enthalten

Frage

Wie zeigt man, dass M nicht regulär ist?

Problem

1. sei n beliebig
2. wähle $w \in L$, sodass $\ell(w) \geqslant n$
3. $\forall$ x, y, z mit $w = xyz$ mit
   - $y \neq \epsilon$
   - $\ell(xy) \leqslant n$
4. finde k; sodass $x(y)^k z \notin L$

Was tun, wenn die Anzahl von 0en und 1en in y gleich?

Antwort

Abschlusseigenschaften nutzen