# Diskrete Mathematik

Martin Avanzini Arne Dür Christoph Kollreider Georg Moser

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2010





## Zusammenfassung der letzten LV

**Satz** Kontraposition des Pumpinglemma

Angenommen

1. $\forall\ n$
2. $\exists$ ein String $w \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$ und
3. $\forall$ Zerlegung von $w$ in $x$, $y$ und $z$ mit $w = xyz$
   - $y \neq \epsilon$,
   - $\ell(xy) \leqslant n$,
4. $\exists\ k$ mit $x(y)^k z \notin L$

dann ist $L$ nicht regulär.

**Beispiel**

die Sprache $L$ der Wörter, die genauso viele 0en wie 1er enthalten ist nicht regulär

# Übersicht

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, Automaten mit $\epsilon$-Übergängen, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Algebraische Gesetze für reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turing Maschinen, Äquivalente Formulierungen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

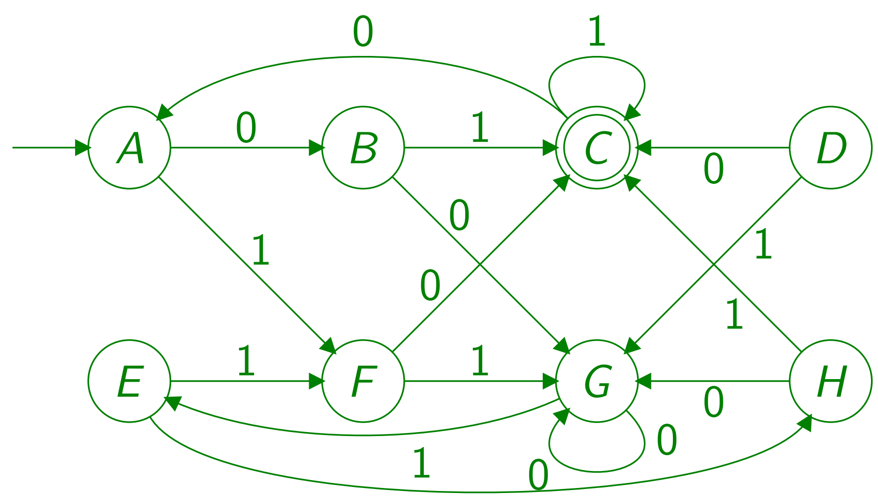
Einführung in die Komplexitätstheorie, Laufzeitkomplexität, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität





# Äquivalenz von Zuständen

betrachte DEA ①:




## Frage

Kann dieser Automat vereinfacht werden?

## Antwort

Ja, denn intuitiv sind die folgenden Zustandspaare äquivalent

$$(A, E) \quad (B, H) \quad (D, F)$$

# Zustandsäquivalenz

sei $A$ ein DEA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

## Definition

äquivalent

Zustände $p$ und $q$ heißen äquivalent wenn

- $\forall$ Strings $w$
  $\widehat{\delta}(p, w)$ genau dann akzeptierend, wenn $\widehat{\delta}(q, w)$ akzeptierend

## Definition

unterscheidbar (direkt)

Zustände $p$ und $q$ heißen unterscheidbar wenn

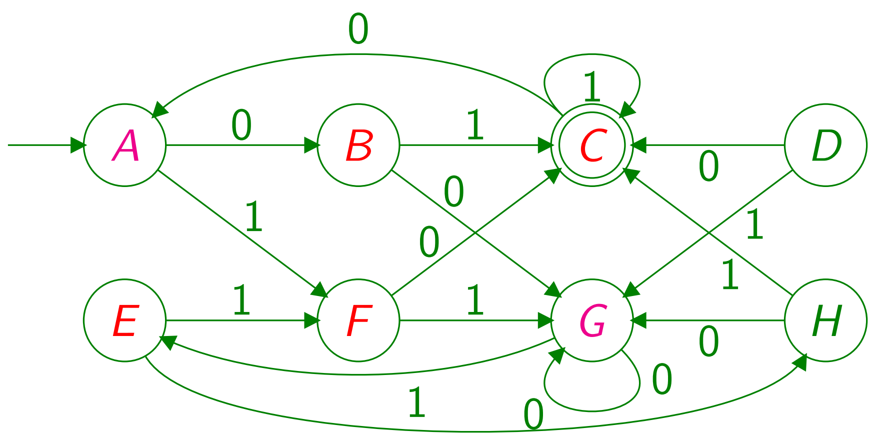
- $\exists$ String $w$
  $\widehat{\delta}(p, w)$ akzeptierend, $\widehat{\delta}(q, w)$ nicht akzeptierend (oder umgekehrt)





## Beispiel

betrachte Automaten ①




betrachte $A$ und $G$:

- $\epsilon$, 0 ,1 unterscheiden nicht
- aber $\widehat{\delta}(A, 01) = C \in F$
- $\widehat{\delta}(G, 01) = E \notin F$

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA

## Definition

unterscheidbar (induktiv)

1. Basis
   wenn $p$ akzeptierend und $q$ nicht,
   dann sind $\{p, q\}$ unterscheidbar
2. Schritt
   seien $p$ und $q$ Zustände, $a$ Eingabe und
   - sei $\delta(p, a) = r$, $\delta(q, a) = s$
   - sodass $\{r, s\}$ unterscheidbar

   dann sind $\{p, q\}$ unterscheidbar

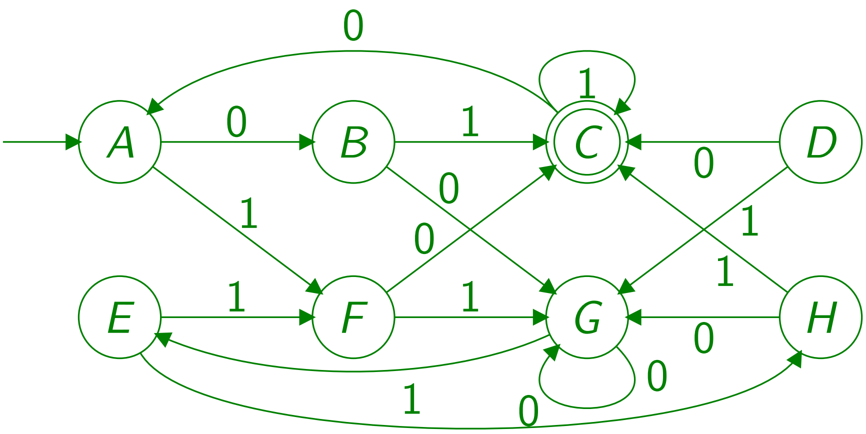
## Satz

sind Zustände $p, q$ nach der induktiven Definition nicht unterscheidbar, dann sind sie auch äquivalent





## Beispiel




| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | | | | | | | |
| ✓ | $B$ | | | | | | |
| ✓ | ✓ | $C$ | | | | | |
| ✓ | ✓ | ✓ | $D$ | | | | |
| | ✓ | ✓ | ✓ | $E$ | | | |
| ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | $F$ | | |
| ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | $G$ | |
| ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | $H$ |

Table-filling Algorithmus liefert die folgenden äquivalenten Zuständsblöcke $\{A, E\}$, $\{B, H\}$, $\{D, F\}$, $\{C\}$, $\{G\}$

### Satz

die Äquivalenz von Zuständen ist transitiv: wenn (i) Zustände $p$ und $q$ äquivalent und (ii) Zustände $q$ und $r$ äquivalent
dann sind auch $p$ und $r$ äquivalent

### Beweis

- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- angenommen $\{p, q\}$ und $\{q, r\}$ sind äquivalent, aber $\{p, r\}$ sind unterscheidbar
- $\exists$ String $w$

$$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(r, w) \notin F$$

- also $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$ sonst wären $q$ und $r$ unterscheidbar
- also $\widehat{\delta}(p, w) \in F$ und $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$,
- somit sind $p$ und $q$ unterscheidbar: Widerspruch ■

### Satz

die Blöcke der äquivalenten Zustände formen eine Partition





## Minimierung Endlicher Automaten

### Definition

Minimierungsalgorithmus

DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
konstruiere $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$:

1. unerreichbare Zustände eliminieren
2. partitioniere die Zustände in äquivalente Blöcke
3. $Q_B$ sind die verschiedenen Blöcke
4. $\forall$ $S$ ein Block, $\forall$ $a$ ein Eingabesymbol:
   $\exists$ Block $T$, sodass für alle $q \in S$ gilt $\delta(q, a) \in T$
   setze $\delta_B(S, a) = T$
5. $q_B$ ist der Block, der $q_0$ enthält
6. $F_B$ ist die Menge der Blöcke, die Zustände aus $F$ enthalten

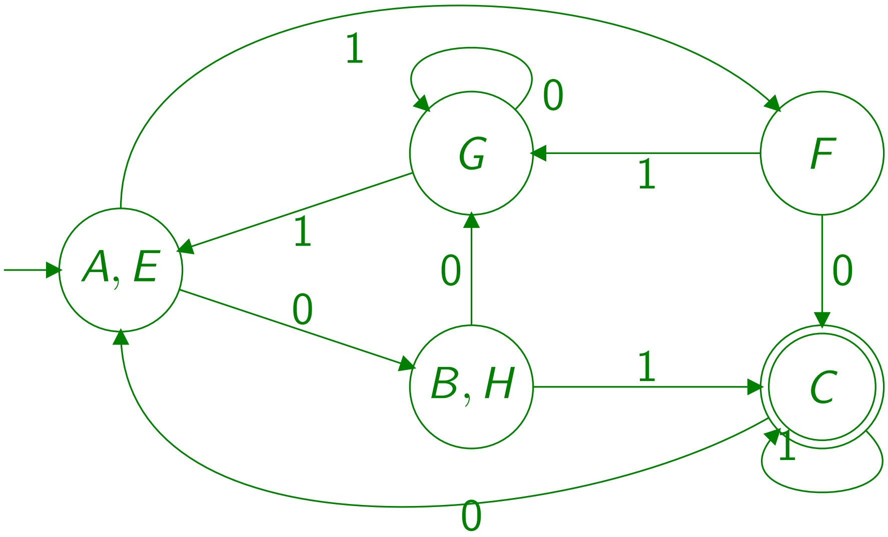
## Beispiel

Minimierung des Automaten ①:

1. alle Zustände sind erreichbar
2. Zustände des minimierten Automaten ②:

$$\{A, E\} \quad \{B, H\} \quad \{C\} \quad \{F\} \quad \{G\}$$

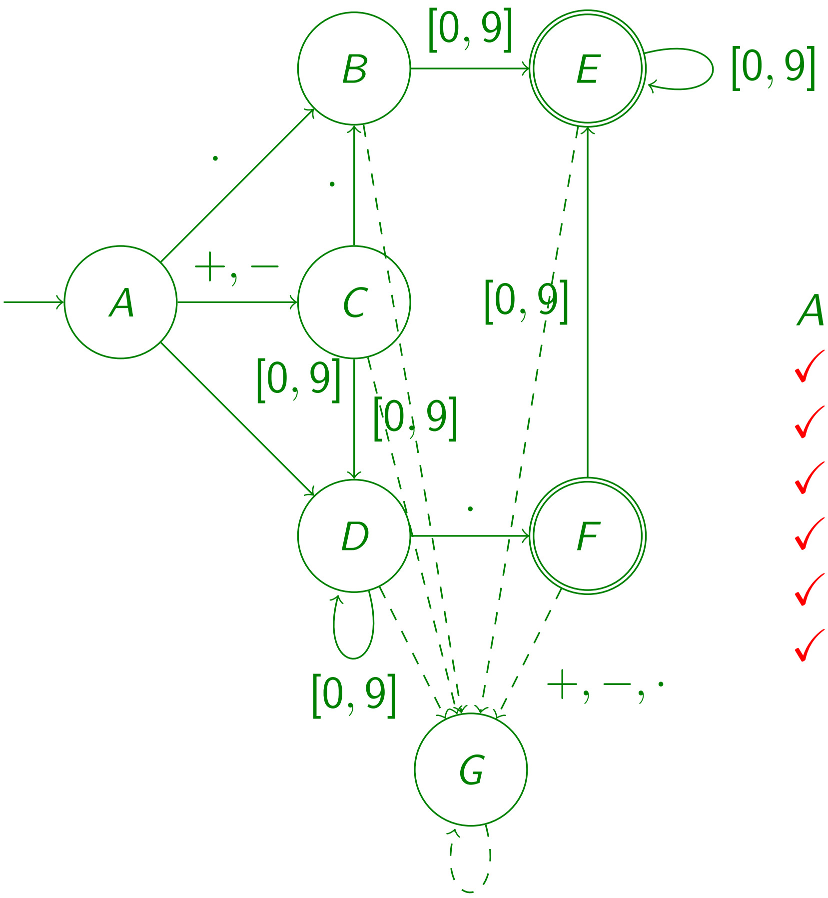
3. Übergangsfunktion $\delta_2$:
   - $\delta_2(\{A, E\}, 0) = \{B, H\}$, da
   - $\delta_1(A, 0) = B$
4. Ergebnis:





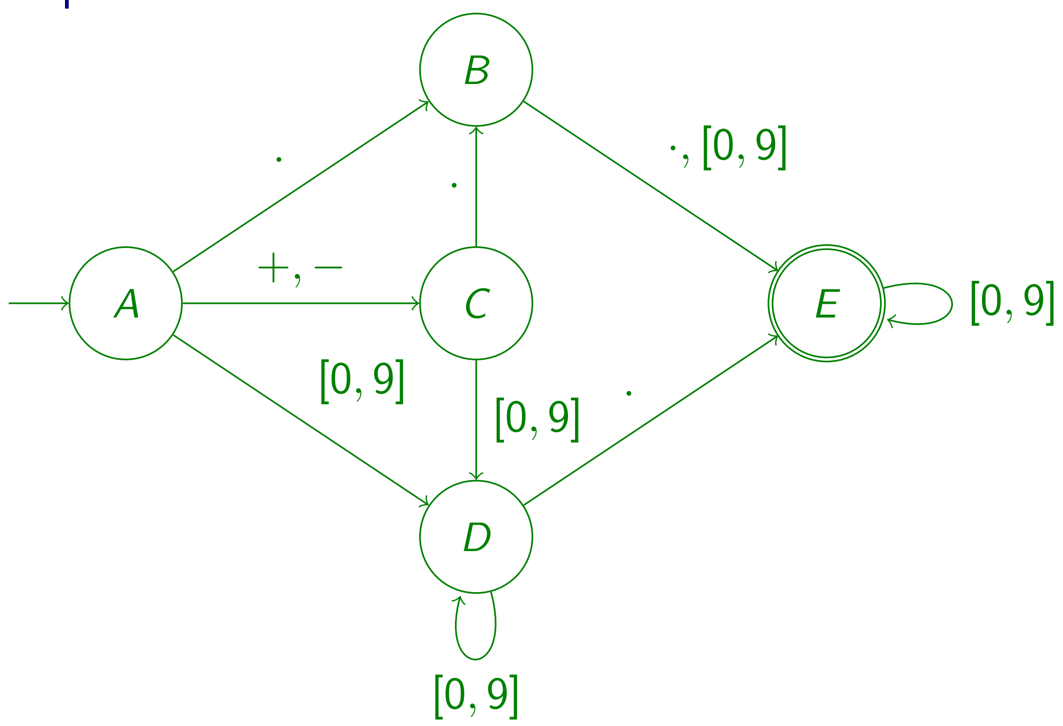



## Beispiel: Der Dezimalzahlautomat




| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| B | ✓ | | | | | |
| C | ✓ | ✓ | | | | |
| D | ✓ | ✓ | ✓ | | | |
| E | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | |
| F | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | |
| G | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |

## Beispiel




## Satz

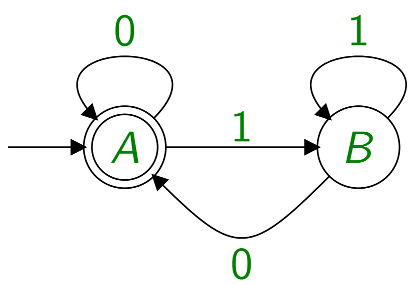
1. der Minimierungsalgorithmus ist optimal
2. das Ergebnis des Minimierungsalgorithmus ist eindeutig

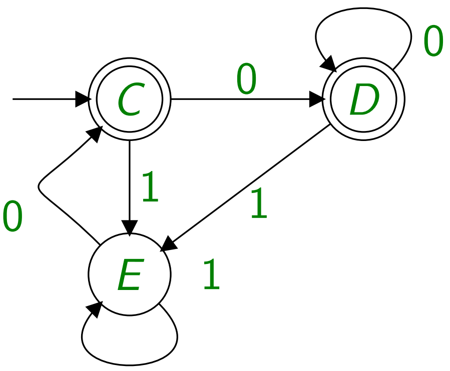




# Äquivalenz von Automaten

## Beispiel




## Beobachtung

- beide DEAs akzeptieren $\mathsf{L}(\epsilon + (\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{0})$
- zur Kontrolle wende Table-filling Algorithmus an
- auf einen Automat mit zwei Startzuständen:

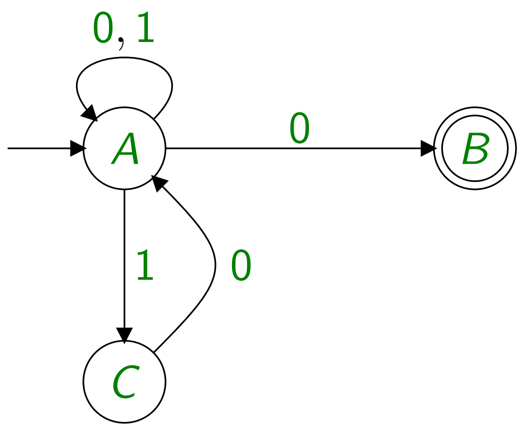
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | | | | |
| ✓ | $B$ | | | |
| | ✓ | $C$ | | |
| | ✓ | | $D$ | |
| ✓ | | ✓ | ✓ | $E$ |

# Minimierung eines NEA

## Satz

Minimierungsalgorithmus ist nicht richtig für NEAs

## Beweis




- Zustände $\{A, B\}$ sowie $\{C, B\}$ sind unterscheidbar
- ebenso ist $\{A, C\}$ unterscheidbar bei Eingabe $0$
- aber Zustand $C$ ist überflüssig ∎