Computational Logic

Diskrete Mathematik

Martin Avanzini Arne Dür Christoph Kollreider Georg Moser

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2010

Zusammenfassung der letzten LV

Definition Minimierungsalgorithmus

DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
konstruiere $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$:

1. unerreichbare Zustände eliminieren
2. partitioniere die Zustände in äquivalente Blöcke
3. Q_B sind die verschiedenen Blöcke
4. $\forall$ S ein Block, $\forall$ a ein Eingabesymbol:
   $\exists$ Block T, sodass für alle $q \in S$ gilt $\delta(q, a) \in T$
   setze $\delta_B(S, a) = T$
5. q_B ist der Block, der q_0 enthält
6. F_B ist die Menge der Blöcke, die Zustände aus F enthalten

Satz
der Minimierungsalgorithmus ist optimal und eindeutig

Übersicht

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, Automaten mit ϵ-Übergängen, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Algebraische Gesetze für reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turing Maschinen, Entscheidungsprobleme, Äquivalente Formulierungen, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Einführung in die Komplexitätstheorie, Laufzeitkomplexität, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie

Frage
Ist jedes Problem algorithmisch lösbar?

Antwort
Nein!

Ein einfaches Programm "hello,world" Programm

```
main()
{
        printf(``hello, world\n'');
}
```

Beispiel — Program F

```
main()
{
      int n, summe, x, y, z;
      scanf(''%d'', &n);
      summe = 3;
      while (1) {
          for (x=1; x <= summe-2; x++)
              for (y=1; y<=summe-x-1; y++) {
                  z = summe - x - y;
                  if (exp(x,n) + exp(y,n) == exp(z,n))
                     printf(''hello, world\n'');
              }
          summe++;
      }
}
```

Program F ist kein "hello, world" Programm

Beispiel — Programm G

```
main()
{
      int n, x, y, z, test;
      summe=4;
      while (1) {
          test = 0;
          for (x=2; x <= summe; x++) {
                  y = summe - x;
                  if (primes(x) && primes(y))
                     test = 1;
              }
          if !test printf(''hello, world\n'');
          summe = summe + 2;
      }
}
```

Program G ist wahrscheinlich kein "hello, world" Programm

Satz

es kann kein Testprogramm für "hello-world" Programme geben

Beweisskizze

- wir betrachten ein hypothetisches Programm H, das wir "hello, world" Tester nennen

- man kann zeigen, dass ein "hello, world"-Tester nicht existieren kann Beweismethode: Diagonalisierung
- es ist unentscheidbar, ob ein beliebiges Programm ein "hello, world" Programm ist

Unvollständige Liste unentscheidbarer Probleme

Definition — Halteproblem

als Halteproblem bezeichnen wir das Problem, ob ein beliebiges Programm auf seiner Eingabe hält

Definition — PCP

Postsches Korrespondenzproblem: Gegeben zwei Listen von Strings der gleichen Länge $w_1, w_2, \ldots, w_n$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Gesucht sind Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_m$, sodass

$$w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_m} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$$

Satz

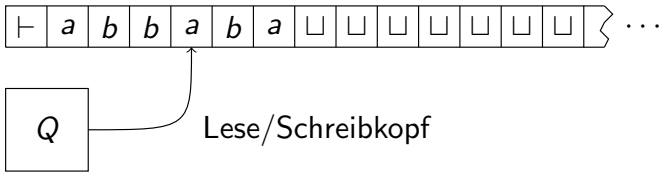
die folgenden Probleme sind unentscheidbar:

1. das Halteproblem
2. das Postsche Korrespondenzproblem
3. ist eine beliebige Sprache regulär?

Turingmaschinen

Definition - informell

deterministische, einbändige Turingmaschine:



Church-Turing These

jedes algorithmisch lösbare Problem ist mit einer Turingmaschine lösbar

Definition - formal

Turingmaschine

eine deterministische, einbändige Turingmaschine M ist ein 9-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen,
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen,
3. Γ eine endliche Menge von Bandsymbolen, sodass $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der linke Endmarker,
5. $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$, das Blanksymbol,
6. $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}$ die Übergangsfunktion,
7. $s \in Q$, der Startzustand,
8. $t \in Q$, der akzeptierende Zustand und
9. $r \in Q$, der verwerfende Zustand mit $t \neq r$.

Beispiel: Binärer Nachfolger

betrachte

$$M = (\{s, t, r, p\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1\}, \delta, s, t, r)$$

mit δ:

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	0	$(s, 0, \mathrm{R})$
s	1	$(s, 1, \mathrm{R})$
s	$\sqcup$	$(p, \sqcup, \mathrm{L})$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$
p	0	$(t, 1, \mathrm{L})$
p	1	$(p, 0, \mathrm{L})$
p	$\vdash$	$(t, \vdash, \mathrm{R})$

Zusatzbedingungen

- $\forall\ p \in Q, \exists\ q \in Q$ sodass:
$$\delta(p, \vdash) = (q, \vdash, \mathrm{R})$$
- $\forall\ b \in \Gamma\ \exists\ c, c' \in \Gamma$ und $d, d' \in \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}$:
$$\delta(t, b) = (t, c, d)$$
$$\delta(r, b) = (r, c', d')$$

Beispiel

Binärer Nachfolger (2)

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
t	$*$	$*$
r	$*$	$*$

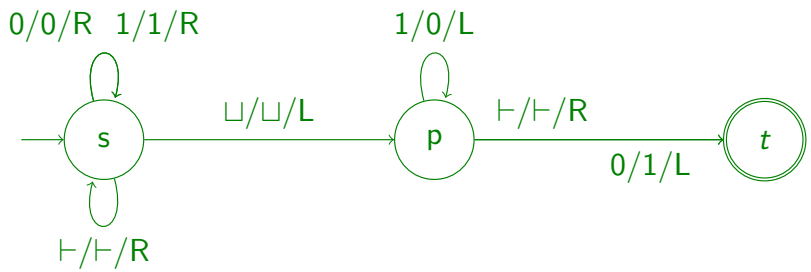
sodass Zusatzbedingungen erfüllt

Beispiel: Binärer Nachfolger (3)

betrachte

$$M = (\{s, t, r, p\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1\}, \delta, s, t, r)$$

mit δ:



Demo: Turing Machine Simulator

Installation

`http://sourceforge.net/project/showfiles.php?group_id=210379&package_id=252627`

Beispiel

```
java -jar TuataraTMSim.jar
```


Definition — Konfiguration

eine Konfiguration einer TM M ist ein Tripel (p, x, n), sodass

- $p \in Q$ Zustand,
- $x = y\sqcup^\infty$ Bandinhalt $\qquad y \in \Gamma^*$
- $n \in \mathbb{N}$ Position des Lese/Schreibkopfes

Definition — Startkonfiguration

Startkonfiguration bei Eingabe $x \in \Sigma^*$:

$$(s, \vdash x\sqcup^\infty, 0)$$

Definition

$\xrightarrow[M]{1}$

Relation $\xrightarrow[M]{1}$ ist wie folgt definiert:

$$(p, z, n) \xrightarrow[M]{1} \begin{cases} (q, z', n-1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, \mathrm{L}) \\ (q, z', n+1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, \mathrm{R}) \end{cases}$$

z' den String, den wir aus z erhalten, wenn z_n durch b ersetzt

Definition

$\xrightarrow[M]{*}$

reflexive, transitive Hülle $\xrightarrow[M]{*}$:

- $\alpha \xrightarrow[M]{*} \alpha$
- $\alpha \xrightarrow[M]{n+1} \beta$, wenn $\alpha \xrightarrow[M]{n} \gamma \xrightarrow[M]{1} \beta$ für Konfiguration γ
- $\alpha \xrightarrow[M]{*} \beta$, wenn $\exists\ n\ \alpha \xrightarrow[M]{n} \beta$

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	0	$(s, 0, \mathrm{R})$
s	1	$(s, 1, \mathrm{R})$
s	$\sqcup$	$(p, \sqcup, \mathrm{L})$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$
p	0	$(t, 1, \mathrm{L})$
p	1	$(p, 0, \mathrm{L})$
p	$\vdash$	$(t, \vdash, \mathrm{R})$

$(s, \vdash 0010\sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*}$

$(s, \vdash 0010\sqcup^\infty, 5) \xrightarrow[M]{1}$

$(p, \vdash 0010\sqcup^\infty, 4) \xrightarrow[M]{1}$

$(t, \vdash 0011\sqcup^\infty, 3)$

Definition

Turingmaschine M

- akzeptiert $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists\, y,\, n$:
$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (t, y, n)$$
- verwirft $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists\, y,\, n$:
$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (r, y, n)$$
- hält bei Eingabe x, wenn entweder x akzeptiert oder verworfen, andernfalls hält M nicht
- ist total, wenn M auf allen Eingaben hält

Definition

Sprache einer TM

$$\mathrm{L}(M) := \{x \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } x\}$$

Beispiel

betrachte $M = (\{s, t, r, q_0, q_1, q_0', q_1'\}, \{0,1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1\}, \delta, s, t, r)$ mit δ:

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p,a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p,a)$
s	0	$(q_0, \vdash, \mathrm{R})$	q_0'	0	$(q, \sqcup, \mathrm{L})$
s	1	$(q_1, \vdash, \mathrm{R})$	q_0'	1	$(r, 1, \mathrm{L})$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$	q_0'	$\vdash$	$(r, \vdash, \mathrm{R})$
s	$\sqcup$	$(t, \sqcup, \mathrm{L})$	q_1'	0	$(r, 1, \mathrm{L})$
q_0	0	$(q_0, 0, \mathrm{R})$	q_1'	1	$(q, \sqcup, \mathrm{L})$
q_0	1	$(q_0, 1, \mathrm{R})$	q_1'	$\vdash$	$(r, \vdash, \mathrm{R})$
q_0	$\sqcup$	$(q_0', \sqcup, \mathrm{L})$	q	0	$(q, 0, \mathrm{L})$
q_1	0	$(q_1, 0, \mathrm{R})$	q	1	$(q, 1, \mathrm{L})$
q_1	1	$(q_1, 1, \mathrm{R})$	q	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$
q_1	$\sqcup$	$(q_1', \sqcup, \mathrm{L})$			

es gilt; $\mathrm{L}(M) = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$