11) *Lösung.* Bei Numerierung der Ecken nach dem Alphabet läuft Floyd wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 4 & \infty \\ 2 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty \\ 1 & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty \\ 2 & \boxed{0} & 6 & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty \\ 2 & 0 & 6 & \infty \\ 4 & 2 & \boxed{0} & \infty \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty \\ 2 & 0 & 6 & \infty \\ 4 & 2 & 0 & \infty \\ 1 & 2 & 4 & \boxed{0} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty \\ 2 & 0 & 6 & \infty \\ 4 & 2 & 0 & \infty \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

12) *Lösung.* Kruskal liefert:

k_i	$b(k_i)$	P
		$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$
$\{a,e\}$	1	$\{\{a,e\},\{b\},\{c\},\{d\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$
$\{c,d\}$	2	$\{\{a,e\},\{b\},\{c,d\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$
$\{c,e\}$	3	$\{\{a,c,d,e\},\{b\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$
$\{a,d\}$	4	
$\{a,c\}$	5	
$\{f,g\}$	6	$\{\{a,c,d,e\},\{b\},\{f,g\},\{h\}\}$
$\{b,g\}$	7	$\{\{a,c,d,e\},\{b,f,g\},\{h\}\}$
$\{b,f\}$	8	
$\{g,h\}$	9	$\{\{a,c,d,e\},\{b,f,g,h\}\}$

□

13) *Lösung.* Der erweiterte euklidische Algorithmus mit $a = 234$ und $b = 144$ liefert:

A, B	q
$(234, 1, 0)$	
$(144, 0, 1)$	1
$(90, 1, -1)$	1
$(54, -1, 2)$	1
$(36, 2, -3)$	1
$(18, -3, 5)$	

Somit sind $d = 18$, $u = -3$ und $v = 5$. Das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b ist

$$a \cdot \frac{b}{d} = 234 \cdot \frac{144}{18} = 234 \cdot 8 = 1872\,.$$

□

14) *Lösung.* Zunächst entfernen wir die unerreichbaren Zustände 7, 8, 9 und 10. Dann wenden wir den Markierungsalgorithmus an, um die folgende Tabelle zu erhalten:

	1	2	3	4	5
2	✓				
3		✓			
4	✓	✓	✓		
5	✓	✓	✓	✓	
6	✓	✓	✓	✓	✓

Aus dieser Tabelle kann der folgende minimale Automat generiert werden.

	a	b
$\rightarrow \{5\}*$	$\{1,3\}$	$\{6\}$
$\{6\}*$	$\{6\}$	$\{6\}$
$\{1,3\}$	$\{1,3\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{4\}$	$\{2\}$
$\{4\}$	$\{6\}$	$\{2\}$

□

15) *Lösung.* Zunächst benennen wir die Zustände um: $z_0 \rightarrow 1$ und $z_1 \rightarrow 2$. Nen wenden wir die Rekursionsgleichung an und erhalten:

$$\begin{aligned}
R^2_{12} &= R^1_{12} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{22} \\
R^1_{12} &= R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} \\
R^1_{22} &= R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} \\
R^0_{12} &= b \\
R^0_{11} &= \epsilon + a \\
R^0_{22} &= \epsilon + b \\
R^0_{21} &= a
\end{aligned}$$

Der zusammengesetzte Ausdruck hat also die Form:

$$b + (\epsilon + a)(\epsilon + a)^* b + (b + (\epsilon + a)(\epsilon + a)^* b)(\epsilon + b + a(\epsilon + a)^* b)^* (\epsilon + b + a(\epsilon + a)^* b)\ .$$

□

16) *Lösung.* Sei n beliebig und wähle das Wort $w = \mathsf{a}^n\mathsf{c}\mathsf{a}^n \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$. Nun seien x, y, z Teilwörter von w, sodass $w = xyz$ und $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$. Somit kann (bei allen möglichen Formen von x, y und z) nur gelten, dass $x = \mathsf{a}^l$, $y = \mathsf{a}^m$ und $z = \mathsf{a}^{n-m-l}\mathsf{c}\mathsf{a}^n$, wobei $1 \leqslant m$ und $m + l \leqslant n$. Schließlich wählen wir $k = 0$ und betrachten das Wort $w' = \mathsf{a}^l\mathsf{a}^{n-m-l}\mathsf{c}\mathsf{a}^n$. Wie leicht zu sehen ist gilt $w \notin L$. (Beachten Sie dass $m \neq 0$.)

Somit haben wir alle Voraussetzungen der Kontraposition des Pumpinglemmas gezeigt und schließen, dass L nicht regulär ist. □