11) *Lösung.* Wir nummerieren die Ecken alphabetisch und erhalten die Adjazenzmatrix von R

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$M^2 \setminus T = \{(a,b),(c,b),(d,b)\} \; .$$

□

12) *Lösung.* Kruskal liefert:

k_i	$b(k_i)$	P
		$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$
$\{a,d\}$	1	$\{\{a,d\},\{b\},\{c\},\{e\},\{f\},\{g\},\{h\}\}$
$\{b,g\}$	2	$\{\{a,d\},\{b,g\},\{c\},\{e\},\{f\},\{h\}\}$
$\{c,d\}$	3	$\{\{a,c,d\},\{b,g\},\{e\},\{f\},\{h\}\}$
$\{a,c\}$	4	
$\{a,e\}$	5	$\{\{a,c,d,e\},\{b,g\},\{f\},\{h\}\}$
$\{f,g\}$	6	$\{\{a,c,d,e\},\{b,f,g\},\{h\}\}$
$\{c,e\}$	7	
$\{g,h\}$	8	$\{\{a,c,d,e\},\{b,f,g,h\}\}$
$\{b,f\}$	9	

Somit ist $W = \{\{a,d\},\{b,g\},\{c,d\},\{a,e\},\{f,g\},\{g,h\}\}$ der einzige spannende Wald mit minimaler Bewertung. □

13) *Lösung.* Der erweiterte euklidische Algorithmus mit $a = 97$ und $b = 117$ liefert:

q	A	B
	$(97, 1, 0)$	$(117, 0, 1)$
0	$(117, 0, 1)$	$(97, 1, 0)$
1	$(97, 1, 0)$	$(20, -1, 1)$
4	$(20, -1, 1)$	$(17, 5, -4)$
1	$(17, 5, -4)$	$(3, -6, 5)$
5	$(3, -6, -5)$	$(2, 35, -29)$
1	$(2, 35, -29)$	$(1, -41, 34)$

Aus der letzten Zeile folgt nun das Resultat:

$$ggT(97, 117) = 97 \cdot -41 + 117 \cdot 34 = 1 \; .$$

Somit existiert das Inverse von 97 (modulo 117) und es ist 76. □

14) *Lösung.* Die Teilmengenkonstruktion liefert folgenden Automaten:

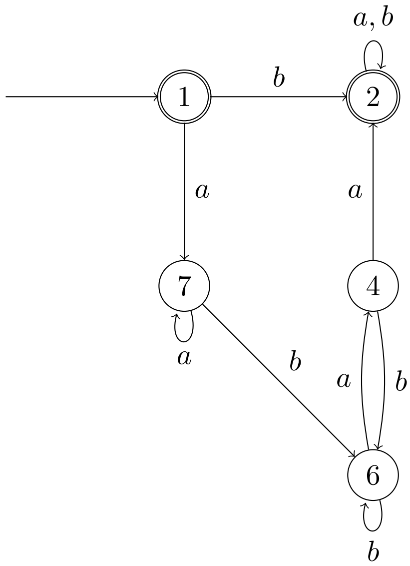
	a	b	c
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
$*\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$*\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$*\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$

□

15) *Lösung.* Die Anwendung des Table-filling-Algorithmus auf A liefert:

1					
✓	2				
✓	✓	3			
✓	✓	✓	4		
✓	✓		✓	5	
✓	✓	✓	✓	✓	6

Die Zustände 3 und 5 können also zu einem Zustand zusammengefasst werden, den wir 7 nennen. Das Ergebnis ist dann der folgende DEA:



$\square$

16) *Lösung.* Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten das Wort $w = \mathsf{a}^n\mathsf{b}\mathsf{a}^n \in L$. Dann hat jede Zerlegung $w = xyz$ mit $\ell(xy) \leqslant n$, $y \neq \epsilon$ die Gestalt $x = \mathsf{a}^i$, $y = \mathsf{a}^j$ und $z = \mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{b}\mathsf{a}^n$ wobei $n - i - j \geqslant 0$ und $j \neq 0$. Dann gilt, fuer $k = 2$:

$$xy^kz = \mathsf{a}^i(\mathsf{a}^j)^2\mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{b}\mathsf{a}^n = \mathsf{a}^{n+j}\mathsf{b}\mathsf{a}^n \notin L\ ,$$

da $j > 0$. Somit ist L nicht regulär. $\square$