Proseminar Diskrete Mathematik
im Sommersemester 2011
1.Blatt für 11.3.2011

1) Wie sind die Begriffe *Vereinigung*, *Durchschnitt* und *Differenz* von *Mengen* definiert? Wie überprüft man, ob zwei Mengen *gleich* sind?

Prüfen Sie nach, ob für beliebige Mengen A, B und C die folgenden Aussagen allgemein gültig sind:

(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

2) Was sind *zusammengesetzte Aussagen*? Wie wird ihr *Wahrheitswert* berechnet?

Von zwei Krankheiten C und D und zwei Krankheitssymptomen S und T ist Folgendes bekannt:

(1) Wenn mindestens eines dieser beiden Symtome auftritt, so leidet der Patient an mindestens einer der beiden Krankheiten.

(2) Tritt Symptom S nicht auf, so kann Krankheit D nicht vorliegen.

(3) Wenn der Patient an Krankheit C leidet und nicht an D, so muß er Symptom T aufweisen.

(4) Leidet der Patient an Krankheit D aber nicht an C, so kann Symptom T nicht auftreten.

Welche Diagnose kann aufgrund dieser medizinischen Kenntnisse angegeben werden, wenn der Patient

(a) beide Symptome,

(b) nur Symptom S,

(c) nur Symptom T,

(d) keines der beiden Symptome aufweist ?

Formulieren Sie die Bedingungen als zusammengesetzte Aussagen und stellen Sie eine Wahrheitstafel auf.

3) Was ist das *Prinzip der vollständigen Induktion*?

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 .$$

Visualisieren Sie diese Formel durch Unterteilen des Quadrats.

4) Was ist das *Bild einer Menge unter einer Abbildung*? Was ist eine *injektive Abbildung*?

   Sei $f : M \to N$ eine Abbildung und seien A und B Teilmengen von M.

   (a) Beweisen Sie:
   $$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
   (b) Widerlegen Sie die allgemeine Gültigkeit von
   $$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)\,.$$
   (c) Beweisen Sie: Wenn f injektiv ist, dann gilt
   $$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)\,.$$

5) Was ist eine *bijektive Abbildung* ? Was ist die *Umkehrabbildung* einer bijektiven Abbildung?

   Prüfen Sie nach, ob die Abbildung
   $$\mathbb{Z} \to \mathbb{N}\ ,\ z \mapsto \begin{cases} 2z & \text{falls } z \geq 0 \\ -2z-1 & \text{falls } z < 0 \end{cases}$$
   bijektiv ist, und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Umkehrabbildung. Wie kann man sich diese Abbildung auf der Zahlengeraden vorstellen ?