Proseminar Diskrete Mathematik

im Sommersemester 2011

3.Blatt für 25.3.2011

11) Wie ist die *lexikographische Ordnung* auf Wörtern definiert ?
Für ein binäres Wort v bezeichne $c(v)$ die Anzahl der Einsen in v („population count“). Für binäre Wörter v und w sei $v <_c w$, falls entweder $c(v) < c(w)$ oder $(c(v) = c(w)$ und $v <_{\text{lex}} w)$ ist.
   (a) Zeigen Sie, dass $\leq_c$ eine totale Ordnung ist.
   (b) Vergleichen Sie die Anordnung der binären Wörter der Länge 4 nach dieser Ordnung mit jener nach der lexikographischen Ordnung.
   (c) Prüfen Sie nach, ob $\leq_c$ wohlfundiert ist.

12) Was ist eine *rekursive Definition* ?
Finden Sie zwei verschiedene Funktionen $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, die folgende Rekursionsformel erfüllen:

$$f(n,m) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = m = 0 \\ (f(n-1,m) + f(n+1,m))/2 & \text{falls } n > 0 \text{ und } m = 0 \\ (f(n,m-1) + f(n,m+1))/2 & \text{falls } n = 0 \text{ und } m > 0 \\ (f(n-1,m) + f(n+1,m) + & \\ \quad f(n,m-1) + f(n,m+1))/4 & \text{falls } n > 0 \text{ und } m > 0. \end{cases}$$

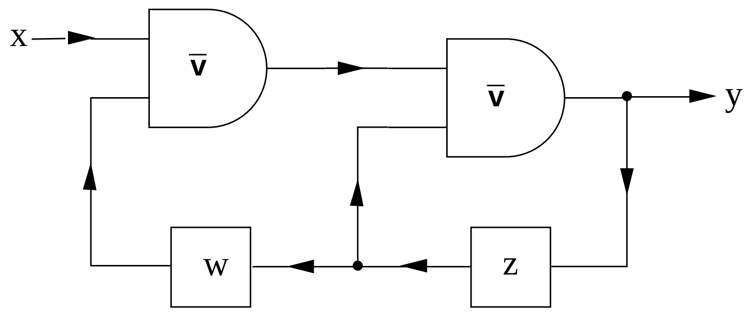
Geben Sie eine anschauliche Interpretation der Rekursionsformel im ersten Quadranten.

13) Was ist die *wohlfundierte Induktion* ?
Prüfen Sie nach, dass die Rekursionsformel

$$f(n,m) := \begin{cases} m & \text{falls } n = 0 \\ n & \text{falls } m = 0 \\ f(n-1,m-1)+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

genau eine Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert. Finden Sie eine explizite Formel für f und beweisen Sie Ihre Behauptung durch wohlfundierte Induktion.

14) Was ist ein *gerichteter Multigraph* ?
Das synchrone Schaltwerk



besteht aus zwei Nor-Gattern und zwei Speicherstellen (Nor ist die Kurzform von „Not Or“, d.h. negiertes Oder). Stellen Sie die Gleichungen für den Ausgang des Schaltwerks und den Folgezustand der Speicherstellen auf und zeichnen Sie ein Zustandsdiagramm mit möglichst wenig kreuzenden Kanten. Welches Eingabewort ändert den Zustand (w,z) von $(0,0)$ auf $(1,1)$?

15) Wie ist ein *Zykel* in einem gerichteten Multigraphen definiert ?
Wann heißt ein gerichteter Multigraph *azyklisch* ?
Sei

$$M = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

und

$$\begin{aligned} R &= \{(1,7),(1,5),(2,6),(3,1),(4,2), \\ &\quad (4,5),(5,2),(5,3),(6,4),(7,5)\} \end{aligned}$$

eine Relation auf M . Zeichnen Sie den Graphen von R mit möglichst wenig kreuzenden Kanten und bestimmen Sie alle Zyklen.

In einem Graphen können Zyklen als Tupel der durchlaufenen Ecken ohne die Endecke notiert werden, zyklisches Vertauschen dieser Ecken gibt dann weitere Zyklen.