Proseminar Diskrete Mathematik
im Sommersemester 2011
6.Blatt für 15.4.2011

28) Was ist eine *rationale Zahl*?
Beweisen Sie: Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich.
Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}\,,\ (a,b) \mapsto \frac{a}{b}\,,$$

und zitieren Sie geeignete Sätze der Vorlesung.

29) Was ist eine *reelle Zahl*?
Beweisen Sie: Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.
Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung

$$[0,1) \to \mathbb{B}^{\mathbb{N}}\,,\ x \mapsto (b_0, b_1, b_2, \ldots)\,,$$

wobei

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^{-1-n}$$

die normierte Binärdarstellung von x ist, und zitieren Sie geeignete Sätze der Vorlesung.

30) Was ist die *erzeugende Funktion* einer Folge von Zahlen?
Verwenden Sie die Methode der erzeugenden Funktionen, um folgende Rekursionsformel zu lösen:

$$f(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ 2f(n-1) + n & \text{falls } n > 0. \end{cases}$$

Was ist das asymptotische Wachstum von f?

31) Was ist ein *Divide-and-Conquer-Algorithmus*?
Das Minimum von Zahlen kann bestimmt werden, indem man zwei Hälften bildet, die Minima rekursiv bestimmt und dann das Minimum der Minima bildet.

Rechnen Sie ein konkretes Beispiel mit zehn Zahlen, visualisieren Sie ihre Berechnung mit Hilfe eines gerichteten Graphen und analysieren Sie die asymptotische Laufzeit mit dem Master-Theorem.

32) Was ist eine *total geordnete Menge* ?
Sei M eine total geordnete Menge und sei

$$N = \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$$

eine Teilmenge von M mit

$$y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1}\,.$$

Um nachzuprüfen, ob ein beliebiges Element x von M in N enthalten ist, kann man x mit dem mittleren Element

$$y_{\lfloor n/2 \rfloor}$$

vergleichen und dann in der vorderen bzw. hinteren Hälfte suchen.

Rechnen Sie ein konkretes Beispiel mit einer Teilmenge aus zehn Zahlen, visualisieren Sie ihre Berechnung mit Hilfe eines gerichteten Graphen und analysieren Sie die asymptotische Laufzeit mit dem Master-Theorem.

Wie hoch wäre asymptotisch die Laufzeit, wenn man die Teilmenge N der Reihe nach durchsuchen würde ?