1(b) *Lösung.* Zunächst zeigen wir $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cup C) &\Rightarrow x \in A \text{ und } x \notin B \cup C \\ &\Rightarrow x \in A \text{ und } (x \notin B \text{ und } x \notin C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ und } (x \in A \text{ und } x \notin C) \\ &\Rightarrow (x \in A \setminus B) \text{ und } (x \in A \setminus C) \\ &\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \end{aligned}$$

Nun zeigen wir $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$:

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) &\Rightarrow (x \in A \setminus B) \text{ und } (x \in A \setminus C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ und } (x \in A \text{ und } x \notin C) \\ &\Rightarrow x \in A \text{ und } (x \notin B \text{ und } x \notin C) \\ &\Rightarrow x \in A \text{ und } x \notin B \cup C \\ &\Rightarrow x \in A \setminus (B \cup C) \end{aligned}$$

□

3) *Lösung.*
Induktionsbasis: Einsetzen von $n = 0$ liefert:

$$0 = \sum_{k=1}^{0} (2k-1) = 0^2 .$$

Induktionsschritt: Die Induktionshypothese besagt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$. Wir erhalten die folgenden Zusammenhänge, wobei wir die Induktionshypothese in der zweiten Zeile anwenden:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2(n+1) - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 . \end{aligned}$$

□

4(c) *Lösung.*

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cap B) &\iff \exists x (x \in A \cap B \wedge y = f(x)) \\
&\iff \exists x (x \in A \wedge x \in B \wedge y = f(x)) \\
&\iff \exists x ((x \in A \wedge y = f(x)) \wedge (x \in B \wedge y = f(x))) \\
&\iff \exists x_1 \exists x_2 ((x_1 \in A \wedge y = f(x_1)) \wedge (x_2 \in B \wedge y = f(x_2))) \\
&\iff \exists x_1 (x_1 \in A \wedge y = f(x_1)) \wedge \exists x_2 (x_2 \in B \wedge y = f(x_2)) \\
&\iff y \in f(A) \wedge y \in f(B) \\
&\iff y \in f(A) \cap f(B)
\end{aligned}$$

Die vierte Äquivalenz gilt, da aus $y = f(x_1)$ und $y = f(x_2)$ wegen der Injektivität $x_1 = x_2$ folgt. $\square$