54) *Lösung.* Zwei reguläre Ausdrücke E und F sind äquivalent, wenn $\mathrm{L}(E) = \mathrm{L}(F)$. Wir zeigen im folgenden für ein beliebiges Wort x, dass $x \in \mathrm{L}(E) \iff x \in \mathrm{L}(F)$. Um die Gleichheit zu zeigen, genügt es die Variablen E, F, G des regulären Ausdrucks, durch konkrete Zeichen $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ zu ersetzen.

a)

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{L}(\mathbf{e}(\mathbf{f}+\mathbf{g})) &\iff x = \mathbf{e}y \text{ und } y \in \mathrm{L}(\mathbf{f}+\mathbf{g}) \\
&\iff x = \mathbf{e}y \text{ und } (y = \mathbf{f} \text{ oder } y = \mathbf{g}) \\
&\iff x = \mathbf{ef} \text{ oder } \mathbf{eg} \\
&\iff x \in \mathrm{L}(\mathbf{ef}+\mathbf{eg}))
\end{aligned}$$

b) Offensichtlich gilt für $x = \epsilon$ sowohl $x \in \mathrm{L}((\mathbf{e}+\mathbf{f})^*)$ als auch $x \in \mathrm{L}((\mathbf{e}^*+\mathbf{f}^*)^*)$. Im Fall $x = a_1 \cdots a_n$ für $n \geqslant 1$ und $a_i \in \Sigma$ ein einzelnes Symbol gilt:

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{L}((\mathbf{e}+\mathbf{f})^*) &\iff a_i \in \mathrm{L}(\mathbf{e}+\mathbf{f}) \qquad \text{für alle } i,\ 1 \leqslant i \leqslant n \\
&\iff a_i \in \{\mathsf{e}, \mathsf{f}\} \\
&\iff a_i \in \mathrm{L}(\mathbf{e}^*+\mathbf{f}^*) \\
&\iff x \in \mathrm{L}((\mathbf{e}^*+\mathbf{f}^*)^*)
\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die Implikation: aus $a_i \in \mathrm{L}(\mathbf{e}^*+\mathbf{f}^*)$ folgt $a_i \in \{\mathsf{e}, \mathsf{f}\}$, deshalb gilt, da nach Voraussetzung $a_i \in \Sigma$.

□

57) *Lösung.* Spielerin Zenzi spielt gegen Spieler Hans. Zenzi versucht zu zeigen, dass die Sprache *nicht* regulär ist, Hans versucht dies zu widerlegen.

a) Zenzi wählt die Sprache L.
b) Hans wählt eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$.
c) Zenzi wählt das Wort $w = \mathsf{a}^n\mathsf{b}^n\mathsf{c}^n$, da $w \in L$ und $\ell(w) \geqslant n$.
d) Hans wählt die Teilworte x, y, z beliebig, sodass $w = xyz$ und $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$.
e) Zenzi erkennt, dass $xy = \mathsf{a}^\ell$ für ein $\ell \leqslant n$ gelten muss. Somit setzt sie $x = \mathsf{a}^i$, $y = \mathsf{a}^j$ mit $i + j = \ell$ und $j \neq 0$. Nun gewinnt Zenzi, da für $k = 2$ $\mathsf{a}^{i+j}\mathsf{a}^j\mathsf{a}^{n-i-j}\mathsf{b}^n\mathsf{c}^n \notin L$ gilt.

□

58) *Lösung.* Eliminierung aller nicht erreichbaren Zustände aus q_0 liefert den folgenden Automaten:

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_0	q_2
q_2	q_3	q_1
$*q_3$	q_3	q_0

Nun, wenden wir den Table-filling Algorithmus an und erhalten die folgende Tabelle. (Hier bezeichnen die Zahlen, wann die entsprechenden Zustandspaare als unterscheidbar markiert werden.)

q_0			
③	q_1		
②	②	q_2	
①	①	①	q_3

Der oben angegebene Automat ist also schon minimal. $\square$