60) *Lösung.* In der Lösung beschränken wir uns auf die Antwort für die zweite Sprache L_2.

Die Sprache L_2 ist nicht regulär, wie sich mit einer Anwendung des Pumpinglemma zeigen lässt. Sei n eine beliebige Zahl, wir setzen $w = \mathsf{a}^n\mathsf{b}^n$. Somit ist die erste Bedingung (der Kontraposition) des Pumpinglemmas erfüllt: $w \in L_2$ und $\ell(w) \geqslant n$.

Nun zeigen wir für alle Zerlegungen $w = xyz$, mit $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$, dass ein k existiert mit $xy^kz \notin L_2$. Laut unserer Wahl von w gilt $xy = \mathsf{a}^j$ mit $0 < j \leqslant n$ und somit auch $y = \mathsf{a}^i$ mit $0 < i \leqslant j$. Wir setzen $k = 0$. Dann gilt $xy^0z = xz = \mathsf{a}^{n-i}\mathsf{b}^n \notin L_2$ Da die Zerlegungen x, y, z beliebig waren, können wir in allen Fällen $k = 0$ wählen und erhalten immer $xy^kz \notin L_2$.

Somit haben wir alle Bedingungen (der Kontraposition) des Pumpinglemmas gezeigt und die Sprache L_2 ist nicht regulär. □

61) a) *Lösung.* Eine Lösung wären etwa die Indices $i_1 = 2$, $i_2 = 1$, $i_3 = 1$, und $i_4 = 3$. Bezeichne x_j die Wörter in Liste A und y_j die Wörter in Liste B. Dann gilt

$$x_2x_1x_1x_3 = 101111110 = 101111110 = y_2y_1y_1y_3\ .$$

□

b) *Lösung.* Es gibt keine Lösung. Angenommen es gäbe eine Indexmenge i_1, i_2, $\dots i_m$, die eine Lösung darstellt. Wir behaupten $i_1 = 1$. Andererseits stimmen die Präfixe der Strings in den Listen A und B nicht überein. Wir erhalten als partielle Lösung:

$$A\colon 10\dots \qquad\qquad B\colon 101\dots$$

Ähnlich sieht man, dass $i_2 = 3$ sein muss:

$$A\colon 10101\dots \qquad\qquad B\colon 101011\dots$$

Nun sehen wir, dass die Wörter niemals so erweitert werden können, dass beide gleich werden, da wir uns nun wieder in der Situation nach der Wahl des Index 1 finden. Der String assoziert mit A wird niemals den String assoziert mit B einholen. Also kann es keine Lösung geben. □

62) *Lösung.* Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, \mathsf{yes}, \mathsf{no})$ wobei $Q = \{s, r_l, r_r, \mathsf{0}_l, \mathsf{0}_r, \mathsf{1}_l, \mathsf{1}_r, q, \mathsf{yes}, \mathsf{no}\}$ und $\Sigma = \{::, \mathsf{0}, \mathsf{1}\}$. Als zusätzliches Symbol verwenden wir außerdem $\star$, das heißt $\Gamma = \Sigma \cup \{\vdash, \sqcup, \star\}$. Die Übergangsfunktion ist wie folgt definiert, wobei a, b entweder

für $\mathsf{0}$ oder $\mathsf{1}$ stehen.

$$
\begin{aligned}
\delta(s, \vdash, \vdash) &= (s, \vdash, \vdash, \mathrm{R}, \mathrm{R}) & \delta(a_r, a, \sqcup) &= (r_r, a, \star, \mathrm{L}, \mathrm{L}) \\
\delta(s, a, \sqcup) &= (a_l, a, \star, \mathrm{R}, \mathrm{R}) & \delta(r_r, b, \star) &= (r_r, b, \star, \mathrm{L}, \mathrm{L}) \\
\delta(s, a, \star) &= (s, a, \star, \mathrm{R}, \mathrm{R}) & \delta(r_r, ::, \sqcup) &= (r_l, ::, \sqcup, \mathrm{L}, \mathrm{L}) \\
\delta(s, ::, \sqcup) &= (q, ::, \star, \mathrm{R}, \mathrm{R}) & \delta(r_l, b, \sqcup) &= (r_l, b, \sqcup, \mathrm{L}, \mathrm{L}) \\
\delta(a_l, b, \sqcup) &= (a_l, b, \sqcup, \mathrm{R}, \mathrm{R}) & \delta(r_l, a, \star) &= (s, a, \star, \mathrm{R}, \mathrm{R}) \\
\delta(a_l, ::, \sqcup) &= (a_r, ::, \sqcup, \mathrm{R}, \mathrm{R}) & \delta(q, a, \star) &= (q, a, \star, \mathrm{R}, \mathrm{R}) \\
\delta(a_r, b, \star) &= (a_r, b, \star, \mathrm{R}, \mathrm{R}) & \delta(q, \sqcup, \sqcup) &= (\mathsf{yes}, \sqcup, \sqcup, \mathrm{R}, \mathrm{R})
\end{aligned}
$$

Um eine kurze Darstellung von δ zu erhalten, wurden in der obigen Tabelle Übergänge in den/innerhalb des verwerfenden Zustands nicht angegeben. Zur Vervollständigung muss in allen Fällen, in denen für M kein Übergang definiert ist, ein Übergang in Zustand no eingeführt werden.

$\square$