6 b) *Lösung.* Die Behauptung ist falsch. Betrachte $n^2 \in \mathrm{O}(n^2)$ und $n \in \mathrm{O}(n^2)$, aber $n \notin \mathrm{O}(1)$. □

c) *Lösung.* Gelte $f_1 \in \mathrm{O}(g_1)$ und $f_2 \in \Omega(g_2)$, das heißt:

- $\exists c_1 \exists m_1 \forall n\,(n \geqslant m_1 \Rightarrow f_1(n) \leqslant c_1 \cdot g_1(n))$
- $\exists c_2 \exists m_2 \forall n\,(n \geqslant m_2 \Rightarrow f_2(n) \geqslant c_2 \cdot g_2(n))$

Setze $m := \max\{m_1, m_2\}$. Für alle $n \geqslant m$ gilt nun:

$$\frac{f_1}{f_2}(n) = \frac{f_1(n)}{f_2(n)} \leqslant \frac{c_1 \cdot g_1(n)}{c_2 \cdot g_2(n)} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{g_1(n)}{g_2(n)} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{g_1}{g_2}(n) .$$

In Summe haben wir die Behauptung $\frac{f_1}{f_2} \in \mathrm{O}(\frac{g_1}{g_2})$ gezeigt. □

8) *Lösung.* Da $n > 0$, können wir schreiben $n = \sum_{i=0}^{l-2} b_i 2^i + 2^{l-1}$ mit $l \geqslant 1$, $b_i \in \{0, 1\}$. Wir erhalten die folgenden Zusammenhänge:

$$2^{l-1} \leqslant n \leqslant \sum_{i=0}^{l-2} 1 \cdot 2^i + 2^{l-1} = \sum_{i=0}^{l-1} 2^i = 2^l - 1 ,$$

woraus $2^{l-1} < n + 1 \leqslant 2^l$ und somit

$$l - 1 < \log_2(n+1) \leqslant l ,$$

folgt. Somit können wir schließen: $\lceil \log_2(n+1) \rceil = l = L(n)$.

Das asymptotische Wachstum von $L(n)$ ist $\Theta(\log n)$, was man wie folgt sieht: Wir haben $L(n) \in \mathrm{O}(\log n)$ da für alle $n \geqslant 4$ gilt:

$$\begin{aligned} \lceil \log_2(n+1) \rceil &\leqslant \log_2(n+1) + 1 \leqslant \log_2(2n) + 1 = \\ &= \log_2(n) + 2 \leqslant 2 \log_2 n = \frac{2}{\log 2} \log n . \end{aligned}$$

Andererseits gilt $L(n) \in \Omega(\log n)$, da:

$$\lceil \log_2(n+1) \rceil \geqslant \log_2(n+1) \geqslant \log_2(n) = \frac{1}{\log(2)} \cdot \log(n) .$$

Aus diesen beiden Beobachtungen folgt die Behauptung

$$L(n) = \Theta(\log n) .$$

□