11 a) *Lösung.* Zur notationellen Vereinfachung betrachten wir auch die Umkehrung der Relation $<_c$ ($<_{\text{lex}}$) die wir mit $>_c$ ($>_{\text{lex}}$) bezeichnen.

Offensichtlich ist $<_c$ irreflexiv, da schon $<_{\text{lex}}$ irreflexiv. Nun zeigen wir, dass die Relation transitiv ist:

$$\begin{aligned} u <_c v \wedge v <_c w &\Rightarrow (c(u) < c(v) \vee (c(u) = c(v) \wedge u <_{\text{lex}} v)) \wedge \\ &\qquad \wedge (c(v) < c(w) \vee (c(v) = c(w) \wedge u <_{\text{lex}} v)) \\ &\Rightarrow (c(u) < c(w) \vee (c(u) = c(w) \wedge u <_{\text{lex}} w)) \\ &\Rightarrow u <_c w \;. \end{aligned}$$

Schließlich überprüfen wir, dass $<_c$ total ist:

$$\begin{aligned} u \neq v &\Rightarrow (c(u) < c(v)) \vee (c(u) > c(v)) \vee \\ &\qquad \vee (c(u) = c(v) \wedge (u <_{\text{lex}} v \vee u >_{\text{lex}} v)) \\ &\Rightarrow (c(u) < c(v) \vee (c(u) = c(v) \wedge u <_{\text{lex}} v)) \vee \\ &\qquad \vee (c(u) > c(v) \vee (c(u) = c(v) \wedge u >_{\text{lex}} v)) \\ &\Rightarrow u <_c v \vee u >_c v \;. \end{aligned}$$

Mit Hilfe einer Anwendung von Satz 1.5(2) im Skriptum sehen wir dass $\leq_c$ eine totale Ordnung ist. □

c) *Lösung.* Die Relation $<_c$ ist nicht wohlfundiert, betrachte:

$$1 >_c 01 >_c 001 >_c 0001 >_c \dots$$

□

12 *Lösung.* Die folgenden Funktionen erfüllen die Rekursionsgleichung:

$$f_1(n, m) := 0 \qquad\qquad f_2(n, m) := n + m \;.$$

Es ist leicht zu sehen, dass es beliebig viele Möglichkeiten gibt Funktionen f zu definieren, die den Rekursionsgleichungen genügen: Jede *lineare* Funktion erfüllt die Mittelwertbedingungen, die in der Rekursionsformel angegeben sind. □

13 *Lösung.* Zunächst zeigen wir mit wohlfundierter Induktion bezüglich der lexikographischen Ordnung $<_{\text{lex}}$ auf $\mathbb{N}^2$, dass die Rekursionsformel eine eindeutige Funktion definiert. (Ebendso wäre es möglich Induktion nach der Summe der Argumente $n + m$ zu führen.)

- *Basis*: $f(0, 0) = 0$ und dieser Wert ist eindeutig.

- *Schritt*: Wir können annehmen $(n, m) >_{\text{lex}} (0, 0)$ und erhalten einen der folgenden Fälle: (i) $n = 0$, (ii) $m = 0$, oder (iii) $n > 0$, $m > 0$. Für die Fälle (i) und (ii) gilt $f(0, m) = m$ beziehungsweise $f(n, 0) = n$, somit ist die Funktion hier eindeutig definiert. Für Fall (iii) erhalten wir $f(n, m) = f(n-1, m-1)+1$. Da $f(n - 1, m - 1)$ eindeutig nach Induktionsvoraussetzung, ist auch $f(n, m)$ eindeutig.

Um eine explizite Darstellung für $f(n, m)$ zu finden genügt eine Fallunterscheidung zwischen (i) $n \geq m$ und (ii) $n < m$ und schrittweises (symbolisches) Ausrechnen, um festzustellen dass $f(n, m) = \max\{n, m\}$ gilt. Die Korrektheit dieses Ansatzes kann dann wieder leicht mittels Induktion nach $<_{\text{lex}}$ auf $\mathbb{N}^2$ nachgewiesen werden.
$\square$