22) *Lösung.* Jede Zusammenhangskomponente eines Waldes ist ein Baum, also können wir Satz 2.9 (Seite 32 im Skriptum) verwenden, um die Anzahl der Bäume festzustellen. Es gilt der folgende Zusammenhang, wobei r die Anzahl der Zusammenhangskomponenten:

$$e = \sum_{i=1}^{r} e_i = \sum_{i=1}^{r} (k_i + 1) = \sum_{i=1}^{r} k_i + r = k + r \ ,$$

woraus sich leicht r bestimmen lässt: $r = e - k$. □

23) *Lösung.* Aus der gegebenen Bewertungsfunktion erhalten wir (als eine Möglichkeit) die folgende Sortierung der Kanten:

$$3, 8, 5, 7, 11, 13, 14, 0, 2, 6, 9, 12, 16, 4, 10, 1, 15 \ .$$

Basierend auf dieser Vorsortierung erhalten wir die folgende Tabelle, deren rechteste Spalte wir sukzessive von oben nach unten ausrechnen können.

3	$\{0,6\}$	4	$\{\{0,6\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{7\}\}$
8	$\{2,3\}$	4	$\{\{0,6\},\{1\},\{2,3\},\{4\},\{5\},\{7\}\}$
5	$\{1,4\}$	5	$\{\{0,6\},\{1,4\},\{2,3\},\{5\},\{7\}\}$
7	$\{1,7\}$	5	$\{\{0,6\},\{1,4,7\},\{2,3\},\{5\}\}$
11	$\{3,7\}$	5	$\{\{0,6\},\{1,2,3,4,7\},\{5\}\}$
13	$\{4,6\}$	5	$\{\{0,1,2,3,4,6,7\},\{5\}\}$
14	$\{4,7\}$	5	$\{\{0,1,2,3,4,6,7\},\{5\}\}$
0	$\{0,1\}$	6	$\{\{0,1,2,3,4,6,7\},\{5\}\}$
2	$\{0,5\}$	6	$\{\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\}$
6	$\{1,5\}$	6	$\{\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\}$
9	$\{2,6\}$	6	$\{\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\}$
12	$\{4,5\}$	6	$\{\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\}$
16	$\{6,7\}$	6	$\{\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\}$
4	$\{1,2\}$	7	$\{\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\}$
10	$\{3,4\}$	7	$\{\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\}$
1	$\{0,3\}$	8	$\{\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\}$
15	$\{5,7\}$	8	$\{\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\}$

Somit gilt:

$$P = \{\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\}$$
$$W = \{2,3,5,7,8,11,13\} \ ,$$

und die Kantenmenge W definiert einen spannenden Wald mit minimaler Bewertung. Genauer betrachtet definiert W einen Baum. □

24) *Lösung.* Zunächst betrachten wir die Beziehung zwischen den Bewertungen $b(k_i)$ und $b(k_j)$, wobei wir die Notationen des Beweises von Satz 2.10 übernehmen. Im Rahmen dieses Beweises wird gezeigt (Seite 35):

$$\sum_{k \in N} b(k) \leqslant \sum_{k \in M} b(k) . \tag{1}$$

Da die Bewertung von M minimal angenommen war, können wir in der obigen Gleichung (1) sogar Gleichheit schließen. Also gilt $b(k_i) = b(k_j)$ und somit ist nur der Austausch von Kanten mit gleicher Bewertung möglich.

Nun wenden wir uns dem zweiten Teil der Frage zu. Aus der obigen Erkenntnis folgt, dass nur dann Kanten vertauscht werden können, wenn diese Kanten die gleiche Bewertung haben. Folglich kann unter der Annahme einer injektiven Bewertung niemals der entsprechende Fall im Beweis eintreten und der durch den Algorithmus gefundene Wald ist eindeutig. □

25) *Lösung.* Bezeichne M die Menge der befragten Personen. Laut Angabe gilt:

$$\begin{array}{lll}
\sharp(M) = 60 & & \\
\sharp(A) = 26 & \sharp(B) = 26 & \sharp(C) = 25 \\
\sharp(A \cap B) = 8 & \sharp(A \cap C) = 11 & \sharp(B \cap C) = 9 \\
\sharp(M \setminus (A \cup B \cup C)) = 8 & &
\end{array}$$

Nach Definition der Siebformel, spezialisiert für $k = 3$ gilt:

$$\begin{gathered}
\sharp(A \cup B \cup C) = \sharp(A) + \sharp(B) + \sharp(C) - \\
- \sharp(A \cap B) - \sharp(A \cap C) - \sharp(B \cap C) + \sharp(A \cap B \cap C) .
\end{gathered}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sharp(A \cap B \cap C) &= \sharp(A \cup B \cup C) - \\
&\quad - \sharp(A) - \sharp(B) - \sharp(C) + \\
&\quad + \sharp(A \cap B) + \sharp(A \cap C) + \sharp(B \cap C) \\
&= 52 - 26 - 26 - 25 + 8 + 11 + 9 = 3 .
\end{aligned}$$

Die nächste Gleichung folgt aus der Differenzregel und der Siebformel für $k = 2$ unter der Verwendung elementarer Rechenregeln für Mengenoperationen:

$$\begin{aligned}
\sharp(A \setminus (B \cup C)) &= \sharp(A) - \sharp(A \cap (B \cup C)) \\
&= \sharp(A) - \sharp((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= \sharp(A) - \sharp(A \cap B) - \sharp(A \cap C) + \sharp(A \cap B \cap C) \\
&= 26 - 8 - 11 + 3 = 10.
\end{aligned}$$

Ähnlich erhält man $\sharp(B \setminus (A \cup C)) = 12$ und $\sharp(C \setminus (A \cup B)) = 8$ und wir erhalten die folgenden Antworten:

(a) $30(= 10 + 12 + 8)$ Personen lesen genau eine Zeitung.

(b) $19(= (8-3) + (11-3) + (9-3))$ Personen lesen genau zwei Zeitungen.

(c) 3 Personen lesen genau drei Zeitungen.

$\square$

27) *Lösung.* Die Codierung soll über binäre Tripel geschehen, also mit Hilfe der Menge $\mathbb{B}^3 = \{000, 001, \ldots, 111\}$. Da der Zustand A dem Triple 000 zuzuweisen ist, müssen wir für den ersten Teil der Aufgabe die Anzahl der Permuationen von 6 Tripel bestimmen:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5040\,.$$

Im zweiten Teil der Aufgabe, ändert sich nur die Anzahl der zu codierenden Zustände. Wir haben also exakt die gleiche Anzahl von Möglichkeiten ($= 7!$). $\square$