28) *Lösung.* Betrachte die folgende Funktion $f\colon \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$:

$$(a,b) \mapsto \frac{a}{b} \; .$$

Offensichtlich ist f surjektiv. Nach Beispiel 3.6 (im Skriptum) ist $\mathbb{Z}$ abzählbar und mit Hilfe von Satz 3.10(1) folgt, dass $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ abzählbar ist. Somit folgt mit Satz 3.10(4), dass $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ abzählbar ist. Schließlich folgt aus Satz 3.10(2), dass das Bild von f, also $\mathbb{Q}$, abzählbar ist. □

29) *Lösung.* Wir betrachten die folgende Funktion $f\colon [0,1) \to \mathbb{B}^{\mathbb{N}}$:

$$x = \sum_{i \geqslant 0} b_i \cdot \frac{1}{2^{i+1}} \to (b_0, b_1, b_2, \dots) \; ,$$

wobei es sich bei $x = \sum_{i\geqslant 0} b_i \cdot \frac{1}{2^{i+1}}$ um die *normierte* Binärdarstellung von x handelt (siehe "Einführung in die Mathematik 2"). Die Abbildung f ist nicht surjektiv, etwa entspricht der Binärfolge b

$$(1,0,1,1,0,1,1,\dots)$$

die normierte Binärdarstellung $c = (1,0,1,1,1,0,0,\dots)$. Denn

$$\begin{aligned}
\sum_{i \geqslant 0} b_i \cdot \frac{1}{2^{i+1}} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}(1 + \sum_{i \geqslant 0} b_{i+7} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \cdot 2 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \\
&= \sum_{i \geqslant 0} c_i \cdot \frac{1}{2^{i+1}} \; .
\end{aligned}$$

Wir betrachten die endlichen Mengen $E_m := \{b \in \mathbb{B}^{\mathbb{N}} \mid \forall i \geqslant m \; b_i = 1\}$ für alle $m \geqslant 0$. Nach Satz 3.10(3) ist ihre Vereinigung $E := \bigcup_{m \geqslant 0} E_m$ abzählbar. Nun nehmen wir an, die reellen Zahlen wären abzählbar. Dann wäre ihr Bild $f([0,1)) = \mathbb{B}^{\mathbb{N}} \setminus E$ ebenfalls abzählbar (Anwendung der Sätze 3.10(1) und 3.10(2)) und mit einer weiteren Anwendung von Satz 3.10(3) würde folgen, dass $\mathbb{B}^{\mathbb{N}} = (\mathbb{B}^{\mathbb{N}} \setminus E) \cup E$ abzählbar ist. Widerspruch zur Überabzählbarkeit von $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$, siehe Beispiel 3.8. □

30) *Lösung.*

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n\geqslant 0} f(n)x^n = 1 + \sum_{n\geqslant 1}(2f(n-1)+n)x^n \\ &= 1 + 2x\sum_{n\geqslant 1} f(n-1)x^{n-1} + x\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1} \\ &= 1 + 2xF(x) + \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Hier verwenden wir die Reihenentwicklung der geometrischen Reihe $\sum_{n\geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x}$, aus der durch beidseitiges Differenzieren folgt: $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
In Summe erhalten wir:

$$F(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{x}{(1-x)^2(1-2x)} \ ,$$

und mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung (siehe "Einführung in die Mathematik 2") für den Bruch $\frac{x}{(1-x)^2(1-2x)}$ können wir diese Gleichung wie folgt umschreiben:

$$F(x) = \frac{3}{1-2x} - \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \ .$$

Einsetzen der geometrischen Reihe liefert:

$$F(x) = \sum_{n\geqslant 0} 3\cdot 2^n x^n - \sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n - \sum_{n\geqslant 0} x^n \ .$$

D.h. mit Hilfe eines abschließenden Koeffizientenvergleichs erhalten wir die folgende explizite Form für f:

$$f(n) = 3\cdot 2^n - (n+1) - 1 = 3\cdot 2^n - n - 2 \qquad n \geqslant 0 \ .$$

Somit ist das asymptotische Wachstum von f: $f \in \Theta(2^n)$. $\square$