

- 1) An der Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik seien 200 Studierende im ersten Semester. Eine Umfrage ergibt, dass 90 StudentInnen Informatik studieren, 60 Mathematik und 110 Physik. Weiters studieren 20 StudentInnen Mathematik und Informatik, 20 Informatik und Physik, und 30 Mathematik und Physik.

Wieviele StudentInnen studieren Mathematik, Informatik und Physik ? Begründen Sie Ihre Antwort.

(5 Punkte)

2) Prüfen Sie durch wohlfundierte Induktion nach, dass die Rekursionsformel

$$f(n, m) := \begin{cases} 2^m & \text{falls } n = 0 \\ 2^n & \text{falls } m = 0 \\ 4 * f(n - 1, m - 1) & \text{sonst} \end{cases}$$

genau eine Funktion $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ definiert. Finden Sie eine explizite Formel für f .

(20 Punkte)

3) Sei ein bewerteter ungerichteter Graph gegeben durch die Eckenmenge

$$E = \{0, 1, 2, \dots, 9\},$$

die Kantenmenge

$$K = \{0, 1, 2, \dots, 19\}$$

und die Abbildungen r und b laut folgender Tabelle:

k	$r(k)$	$b(k)$
0	{0,2}	2
1	{0,4}	1
2	{0,6}	7
3	{0,8}	3
4	{1,3}	5
5	{1,5}	6
6	{1,7}	7
7	{1,9}	6
8	{2,4}	1
9	{2,6}	6
10	{2,8}	4
11	{3,5}	4
12	{3,7}	3
13	{3,9}	4
14	{4,6}	6
15	{4,8}	7
16	{5,7}	1
17	{5,9}	1
18	{6,8}	5
19	{7,9}	2

Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Kruskal einen spannenden Wald mit minimaler Bewertung.
(10 Punkte)

- 4) Anna sagt: Ich weiß jetzt, was Palindrome sind, nämlich
- Die leere Zeichenkette ϵ ist ein Palindrom
 - Jedes Symbol a ist ein Palindrom
 - Für ein Symbol a und ein Palindrom x ist auch axa ein Palindrom.

Otto sagt: So eine komplizierte Definition. Palindrome sind einfach Zeichenketten, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich lauten.

Zeigen Sie: Ein Wort, das Anna ein Palindrom nennt, ist auch für Otto ein Palindrom. (Füllen Sie dazu die entsprechenden Leerstellen in dem unten angegebenen Beweis ein.)
(15 Punkte)

Wir zeigen mit Induktion , dass jedes Palindrom x nach vorwärts und rückwärts gelesen gleich lautet.

- (i) BASIS: Wenn $n =$ dann gilt entweder
- oder
 - für $a \in \Sigma$,

hier bezeichnet Σ das .

In beiden Fällen gilt: x ist .

- (ii) SCHRITT: Die lautet: Ein Palindrom y mit , nach Annas Definition lautet vorwärts und rückwärts gelesen gleich.

Sei nun $\ell(x) =$, für ein Wort x über Σ , so dass gilt $x = aya$, wobei y ein der Länge bezeichnet.

Nach folgt, dass von vorwärts und rückwärts gelesen gleich ist. Dann muss aber auch gelten: .

□