1) *Lösung.* Bezeichne S die Menge der Studierenden. Laut Angabe gilt:

$$\begin{aligned} &\sharp(S) = 200 & &\sharp(M) = 60 \\ &\sharp(I) = 90 & &\sharp(P) = 110 \\ &\sharp(M \cap I) = 20 & &\sharp(M \cap P) = 30 \\ &\sharp(I \cap P) = 20 & & \end{aligned}$$

Nach Definition der Siebformel, spezialisiert für $k = 3$ gilt:

$$\sharp(M \cup I \cup P) = \sharp(M) + \sharp(I) + \sharp(P) -$$
$$-\sharp(M \cap I) - \sharp(M \cap P) - \sharp(I \cap P) + \sharp(M \cap I \cap P) \ .$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sharp(M \cap I \cap P) = &\sharp(M \cup I \cup P) - \\ &- \sharp(M) - \sharp(I) - \sharp(P) + \\ &+ \sharp(M \cap I) + \sharp(M \cap P) + \sharp(I \cap P) \\ = &\ 200 - 60 - 90 - 110 + 20 + 30 + 20 = 10 \ . \end{aligned}$$

□

2) *Lösung.* Zunächst zeigen wir mit wohlfundierter Induktion bezüglich der lexikographischen Ordnung $<_{\mathsf{lex}}$ auf $\mathbb{N}^2$, dass die Rekursionsformel eine eindeutige Funktion definiert.

- *Basis*: $f(0,0) = 2^0 = 1$, und dieser Wert ist eindeutig.
- *Schritt*: Wir können annehmen $(n,m) >_{\mathsf{lex}} (0,0)$ und erhalten einen der folgenden Fälle: (i) $n = 0$, (ii) $m = 0$, oder (iii) $n > 0$, $m > 0$. Für die Fälle (i) und (ii) gilt $f(0,m) = 2^m$ beziehungsweise $f(n,0) = 2^n$, somit ist die Funktion hier eindeutig definiert. Für Fall (iii) erhalten wir $f(n,m) = 4 * f(n-1, m-1)$. Da $f(n-1, m-1)$ nach Induktionsvoraussetzung eindeutig ist, ist auch $f(m,n)$ eindeutig.

Eine explizite Formel f ist $f(n,m) := 2^{n+m}$. Die Korrektheit dieser Formel zeigen wir wieder durch wohlfundierte Induktion bezüglich $<_{\mathsf{lex}}$ auf $\mathbb{N}^2$.

- *Basis*: $f(0,0) = 2^0 = 1$.
- *Schritt*: Wir verwenden die Fallunterscheidung von oben. Für die Fälle (i) und (ii) gilt $f(0,m) = 2^m$ beziehungsweise $f(n,0) = 2^n$, was genau unserer expliziten Formel entspricht. Für Fall (iii) erhalten wir $f(n,m) = 4 * f(n-1, m-1)$. Laut Induktionsvoraussetzung gilt $f(n-1, m-1) = 2^{n+m-2}$, also ist $f(n,m) = 2^2 * 2^{n+m-2} = 2^{n+m}$.

$\square$

Alternative Lösung. Wir zeigen mit wohlfundierter Induktion bezüglich der lexikographischen Ordnung $<_{\mathsf{lex}}$ auf $\mathbb{N}^2$, dass die Rekursionsformel eindeutig die Funktion $f(n,m) := 2^{n+m}$ definiert.

- *Basis*: $f(0,0) = 2^0 = 1$, und dieser Wert ist eindeutig.
- *Schritt*: Wir können annehmen $(n,m) >_{\mathsf{lex}} (0,0)$ und erhalten einen der folgenden Fälle: (i) $n = 0$, (ii) $m = 0$, oder (iii) $n > 0$, $m > 0$. Für die Fälle (i) und (ii) gilt eindeutig $f(0,m) = 2^m$ beziehungsweise $f(n,0) = 2^n$, was genau unserer expliziten Formel entspricht. Für Fall (iii) erhalten wir $f(n,m) = 4 * f(n-1, m-1)$. Laut Induktionsvoraussetzung ist eindeutig $f(n-1,m-1) = 2^{n+m-2}$, also gilt auch eindeutig $f(n,m) = 2^2 * 2^{n+m-2} = 2^{n+m}$.

$\square$

3) *Lösung.* Aus der gegebenen Bewertungsfunktion erhalten wir (als eine Möglichkeit) die folgende Sortierung der Kanten:

$$1, 8, 16, 17, 0, 19, 3, 12, 10, 11, 13, 4, 18, 5, 7, 9, 14, 2, 6, 15$$

Basierend auf dieser Vorsortierung erhalten wir die folgende Tabelle, deren rechteste Spalte wir sukzessive von oben nach unten ausrechnen können:

k	$r(k)$	$b(k)$	P
1	$\{0,4\}$	1	$\{\{0,4\},\{1\},\{2\},\{3\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\},\{9\}\}$
8	$\{2,4\}$	1	$\{\{0,2,4\},\{1\},\{3\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\},\{9\}\}$
16	$\{5,7\}$	1	$\{\{0,2,4\},\{1\},\{3\},\{5,7\},\{6\},\{8\},\{9\}\}$
17	$\{5,9\}$	1	$\{\{0,2,4\},\{1\},\{3\},\{5,7,9\},\{6\},\{8\}\}$
0	$\{0,2\}$	2	$\{\{0,2,4\},\{1\},\{3\},\{5,7,9\},\{6\},\{8\}\}$
19	$\{7,9\}$	2	$\{\{0,2,4\},\{1\},\{3\},\{5,7,9\},\{6\},\{8\}\}$
3	$\{0,8\}$	3	$\{\{0,2,4,8\},\{1\},\{3\},\{5,7,9\},\{6\}\}$
12	$\{3,7\}$	3	$\{\{0,2,4,8\},\{1\},\{3,5,7,9\},\{6\}\}$
10	$\{2,8\}$	4	$\{\{0,2,4,8\},\{1\},\{3,5,7,9\},\{6\}\}$
11	$\{3,5\}$	4	$\{\{0,2,4,8\},\{1\},\{3,5,7,9\},\{6\}\}$
13	$\{3,9\}$	4	$\{\{0,2,4,8\},\{1\},\{3,5,7,9\},\{6\}\}$
4	$\{1,3\}$	5	$\{\{0,2,4,8\},\{1,3,5,7,9\},\{6\}\}$
18	$\{6,8\}$	5	$\{\{0,2,4,6,8\},\{1,3,5,7,9\}\}$
5	$\{1,5\}$	6	$\{\{0,2,4,6,8\},\{1,3,5,7,9\}\}$
			$\vdots$

Somit gilt

$$P = \{\{0,2,4,6,8\},\{1,3,5,7,9\}\}$$
$$W = \{1,8,16,17,3,12,4,18\}\ ,$$

und die Kantenmenge W definiert einen spannenden Wald mit minimaler Bewertung. □

4) *Lösung.* Wir zeigen mit Induktion $\boxed{\text{über die Wortlänge}}$, dass jedes Palindrom x nach $\boxed{\text{Annas Definition}}$ vorwärts und rückwärts gelesen gleich lautet.

(i) Basis: Wenn $n = \boxed{\ell(x) \leqslant 1}$ dann gilt entweder

- $\boxed{x = \epsilon}$ oder
- $\boxed{x = a}$ für $a \in \Sigma$,

hier bezeichnet Σ das $\boxed{\text{Alphabet}}$.

In beiden Fällen gilt: x ist $\boxed{\text{vorwärts und rückwärts gelesen gleich}}$.

(ii) Schritt: Die $\boxed{\text{Induktionsannahme}}$ lautet: Ein Palindrom y mit $\boxed{\ell(y) \leqslant n}$, nach Annas Definition lautet vorwärts und rückwärts gelesen gleich.

Sei nun $\ell(x) = \boxed{n + 1 \geqslant 2}$, für ein Wort x über Σ, sodass gilt $x = aya$, wobei y ein $\boxed{\text{Palindrom nach Annas Definition}}$ der Länge $\boxed{n - 1}$ bezeichnet.

Nach $\boxed{\text{Induktionsannahme}}$ folgt, dass $\boxed{y}$ von vorwärts und rückwärts gelesen gleich ist. Dann muss aber auch gelten: $\boxed{\text{Das Wort } x \text{ liest sich von vorwärts und rückwärts gleich}}$.

□