1) An der Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik seien 211 Studierende im ersten Semester. Eine Umfrage ergibt, dass 71 StudentInnen Mathematik studieren, 89 Informatik und 94 Physik. Weiters studieren 12 StudentInnen Mathematik und Informatik, 18 Mathematik und Physik, und 14 Informatik und Physik.

   Wieviele StudentInnen studieren Mathematik, Informatik und Physik ? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (5 Punkte)

2) Prüfen Sie durch wohlfundierte Induktion nach, dass die Rekursionsformel

$$f(n,m) := \begin{cases} m & \text{falls } n = 0 \\ f(n-1, m+1) + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

genau eine Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert. Finden Sie eine explizite Formel für $f$.
(20 Punkte)

3) Sei $G$ der bewertete Multigraph mit der Eckenmenge

$$\{a, b, c, d\}$$

und der Kantenmenge

$$\{(a, 5, b), (a, 3, c), (a, 1, d), (c, 1, b), (d, 1, b), (d, 1, c)\},$$

wobei in jedem Tripel die erste Komponente die Anfangsecke, die zweite Komponente die Kantenbewertung und die dritte Komponente die Endecke angibt. Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Floyd alle Abstände zwischen den Ecken.
(10 Punkte)

4) Anna sagt: Ich weiß jetzt, was Palindrome sind, nämlich

- Die leere Zeichenkette $\epsilon$ ist ein Palindrom
- Jedes Symbol $a$ ist ein Palindrom
- Für ein Symbol $a$ und ein Palindrom $x$ ist auch $axa$ ein Palindrom.

Otto sagt: So eine komplizierte Definition. Palindrome sind einfach Zeichenketten, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich lauten. Zeigen Sie: Ein Wort, das Otto als Palindrom bezeichnet, erfüllt Annas Definition. (Füllen Sie dazu die entsprechenden Leerstellen in dem unten angegebenen Beweis ein.)
(15 Punkte)

Wir zeigen mit Induktion ______, dass jedes Palindrom $x$ nach ______, Annas induktiver Definition entspricht.

(i) Basis: Sei $x$ ein Wort, das von ______ gelesen gleich ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:
- Wenn ______ dann gilt $x = \epsilon$, andererseits
- wenn ______, kann $x$ nur aus einem einzigen Symbol bestehen, also $x = a \in \Sigma$, hier bezeichnet $\Sigma$ das ______.

Im ersten Fall folgt die Behauptung mit Hilfe des ______ von Annas Definition. Wenn andererseits der zweite Fall eintritt, verwenden wir den ______ von Annas Definition.

(ii) Schritt: Die ______ lautet: Sei $y$ ein Wort mit $\ell(y) \leqslant n$, das vorwärts und rückwärts gelesen gleich lautet, dann entspricht $y$ auch Annas Definition.

Angenommen $\ell(x) =$ ______ für ein Wort $x$ über $\Sigma$, welches vorwärts und rückwärts gelesen gleich lautet. Dann gilt $x =$ ______, für $a \in \Sigma$ und ______ ein ______. Die letzte Behauptung folgt aus der ______. Um zu schließen, dass das Wort $x$ Annas Definition erfüllt, können wir den ______ verwenden.

$\square$