1) *Lösung.* Seien M die Mengen der StudentInnen, die Mathematik studieren, I die Menge der StudentInnen, die Informatik studieren und P die Menge der StudentInnen, die Physik studieren. Aus der Angabe erhalten wir die folgenden Informationen:

$$\begin{aligned} \sharp(M) &= 71 & \sharp(I) &= 89 & \sharp(P) &= 94 \\ \sharp(M \cap I) &= 12 & \sharp(M \cap P) &= 18 & \sharp(I \cap P) &= 14 \\ \sharp(M \cup I \cup P) &= 211 \end{aligned}$$

Mit der Siebformel erhalten wir folgenden Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \sharp(M \cup I \cup P) = \sharp(M) + \sharp(I) + \sharp(P) - \sharp(M \cap I) - \sharp(M \cap P) \\ - \sharp(I \cap P) + \sharp(M \cap I \cap P) \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \sharp(M \cap I \cap P) &= \sharp(M \cup I \cup P) - \sharp(M) - \sharp(I) - \sharp(P) \\ &\quad + \sharp(M \cap I) + \sharp(M \cap P) + \sharp(I \cap P) \\ &= 211 - 71 - 89 - 94 + 12 + 18 + 14 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es gibt also eine/n StudentIn, der/die Mathematik, Informatik und Physik studiert. □

2) *Lösung.* Zunächst zeigen wir mit wohlfundierter Induktion bezüglich der lexikographischen Ordnung $<_{\mathsf{lex}}$ auf $\mathbb{N}^2$, dass die Rekursionsformel eine eindeutige Funktion definiert.

- *Basis*: $f(0, 0) = 0$, und dieser Wert ist eindeutig.
- *Schritt*: Wir können annehmen $(n, m) >_{\mathsf{lex}} (0, 0)$ und erhalten einen der folgenden Fälle: (i) $n = 0$, $m > 0$, oder (ii) $n > 0$. Für Fall (i) gilt $f(0, m) = m$, somit ist die Funktion hier eindeutig definiert. Für Fall (ii) erhalten wir $f(n, m) = f(n-1, m+1)+1$. Da $f(n-1, m+1)$ nach Induktionsvoraussetzung eindeutig ist, ist auch $f(m, n)$ eindeutig.

Eine explizite Formel f ist $f(n, m) := 2n+m$. Die Korrektheit dieser Formel zeigen wir wieder durch wohlfundierte Induktion bezüglich $<_{\mathsf{lex}}$ auf $\mathbb{N}^2$.

- *Basis*: $f(0, 0) = 0$.
- *Schritt*: Wir verwenden die Fallunterscheidung von oben. Für Fall (i) gilt $f(0, m) = m$, was genau unserer expliziten Formel entspricht. Für Fall (ii) erhalten wir $f(n, m) = f(n-1, m+1) + 1$. Laut Induktionsvoraussetzung gilt $f(n-1, m+1) = 2(n-1)+m+1$, also ist $f(n, m) = 2(n-1)+m+1+1 = 2n+m$.

□

Alternative Lösung. Wir zeigen mit wohlfundierter Induktion bezüglich der lexikographischen Ordnung $<_{\mathsf{lex}}$ auf $\mathbb{N}^2$, dass die Rekursionsformel eindeutig die Funktion $f(n,m) := 2n + m$ definiert.

- *Basis*: $f(0,0) = 0$, und dieser Wert ist eindeutig.
- *Schritt*: Wir können annehmen $(n,m) >_{\mathsf{lex}} (0,0)$ und erhalten einen der folgenden Fälle: (i) $n = 0$, $m > 0$, oder (ii) $n > 0$. Für Fall (i) gilt eindeutig $f(0,m) = m$, was genau unserer expliziten Formel entspricht. Für Fall (ii) erhalten wir $f(n,m) = f(n-1,m+1)+1$. Laut Induktionsvoraussetzung ist eindeutig $f(n-1,m+1) = 2(n-1)+m+1$, also gilt auch eindeutig $f(n,m) = 2(n-1)+m+1+1 = 2n+m$.

□

3) *Lösung.* Die folgenden Matrixen bezeichen die Zwischenmatrizen N für $r = 0,1,2,3$, die in der Ausführung des Algorithmus von Floyd erzielt werden. Die durchgestrichenen Zeilen und Spalten bezeichnen jeweils die für die Berechnung der jeweils nächsten Matrix zu betrachtenden Elemente A_{ir}, A_{rj}.

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 1 \\ \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 1 \\ \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 1 \\ \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix gibt somit alle Abstände zwischen Paaren von Ecken in G an. □

4) *Lösung.* Wir zeigen mit Induktion $\boxed{\text{über die Wortlänge}}$, dass jedes Palindrom x nach $\boxed{\text{Ottos Definition}}$, Annas induktiver Definition entspricht.

(i) Basis: Sei x ein Wort, das von $\boxed{\text{vorwärts und rückwärts}}$ gelesen gleich ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:
- Wenn $\boxed{\ell(x) = 0}$ dann gilt $x = \epsilon$, andererseits
- wenn $\boxed{\ell(x) = 1}$, kann x nur aus einem einzigen Symbol bestehen, also $x = a \in \Sigma$, hier bezeichnet Σ das $\boxed{\text{Alphabet}}$.

Im ersten Fall folgt die Behauptung mit Hilfe des $\boxed{\text{ersten Falles}}$ von Annas Definition. Wenn andererseits der zweite Fall eintritt, verwenden wir den $\boxed{\text{zweiten Fall}}$ von Annas Definition.

(ii) SCHRITT: Die $\boxed{\text{Induktionsannahme}}$ lautet: Sei y ein Wort mit $\ell(y) \leqslant n$, das vorwärts und rückwärts gelesen gleich lautet, dann entspricht y auch Annas Definition.

Angenommen $\ell(x) = \boxed{n+1 \geqslant 2}$ für ein Wort x über Σ, welches vorwärts und rückwärts gelesen gleich lautet. Dann gilt $x = \boxed{aya}$, für $a \in \Sigma$ und $\boxed{y}$ ein $\boxed{\text{Palindrom nach Annas Definition}}$. Die letzte Behauptung folgt aus der $\boxed{\text{Induktionsannahme}}$. Um zu schließen, dass das Wort x Annas Definition erfüllt, können wir den $\boxed{\text{dritten Fall}}$ verwenden.

$\square$