Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2011

Zeitplan

Woche 1	7. März, 9. März	Woche 9	16. Mai, 18. Mai
Woche 2	14. März, 16. März	Woche 10	23. Mai, 25. Mai
Woche 3	21. März, 23. März	Woche 11	30. Mai, 1. Juni
Woche 4	28. März, 30. März	Woche 12	6. Juni, 8. Juni
Woche 5	4. April, 6. April	Woche 13	15. Juni
Woche 6	11. April, 13. April	Woche 14	20. Juni, 22. Juni
Woche 7	2. Mai, 4. Mai	Woche 15	27. Juni, 29. Juni
Woche 8	9. Mai, 11. Mai		

Proseminartest

1. Klausur

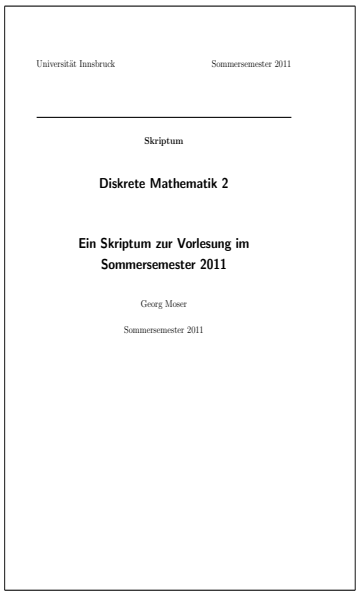
Zeit und Ort

- Montag, 10:15–11:45, HS A
- Mittwoch, 14:15–15:00, HS A

Vorlesungsmaterial

Literatur & Online Material

Skriptum zu Diskrekte Mathematik 2,
4te Auflage


Universität Innsbruck Sommersemester 2011

Skriptum

Diskrete Mathematik 2

Ein Skriptum zur Vorlesung im Sommersemester 2011

Georg Moser

Sommersemester 2011

- Skript
- Folien und Hausaufgaben sind auf der LV Homepage abrufbar
- Ausgewählte Lösung sind ebenfalls online verfügbar, nachdem sie in den Proseminargruppen besprochen wurden

Prüfungs- und Proseminarmodus

Prüfung

- die erste Vorlesungsprüfung findet am 27. Juni statt

Proseminar

- 50% der Aufgaben müssen angekreuzt werden
- Proseminartest (45 min) am 11. Mai zum Zeitpunkt der Vorlesung
- In der Vorlesung am 29. Juni wird die Klausur nachbesprochen
- Im Proseminar am 1. Juli werden allfällig übrige Aufgaben besprochen

Übersicht

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turing Maschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Automaten und Formale Sprachen

- *Die Automatentheorie ist ein Teilgebiet der Theoretischen Informatik, das sich mit dem Studium von Automaten (Modellrechnern) und mit den von diesen Automaten lösbaren Problemen beschäftigt.*

  http://de.wikipedia.org/ 2011

- *Formale Sprachen eignen sich zur mathematisch präzisen Beschreibung im Umgang mit Zeichenketten. So können zum Beispiel Datenformate oder ganze Programmiersprachen spezifiziert werden. Zusammen mit einer formalen Semantik erhalten die definierten Zeichenketten eine mathematische Bedeutung. Bei einer Programmiersprache kann damit einer Programmieranweisung (als Teil der formalen Sprache) ein eindeutiges Maschinenverhalten (als Teil der Semantik) zugeordnet werden.*

  http://de.wikipedia.org/ 2011

	Rechenmodelle	Digitalrechner	
	Turing Maschinen, Berechenbarkeitkeitstheorie, Alan Turing	—	1930er
	Endliche Automaten, Automatentheorie	`Zuse Z3, ENIAC`	1940er
	Grammatiken, Grundlagen des Compilerbaus, Noam Chomsky	`UNIVAC`, Transistoren statt Röhren	1950er
	P vs. NP Komplexitätstheorie, Stephen Cook	Minicomputer, integrierte Schaltkreise	1960er

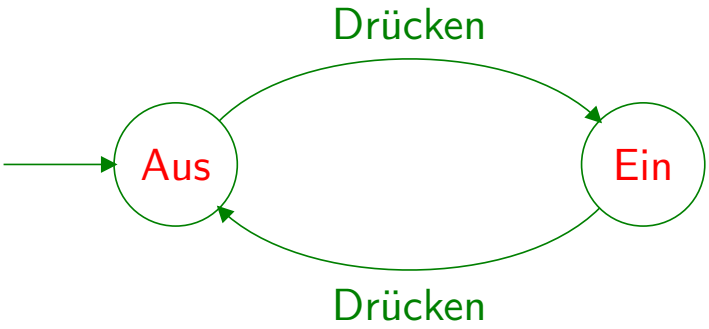
Entschlüsselung der ENIGMA

- "Enigma" ist griechisch für Rätsel
- deutsche Kodiermaschine eingesetzt im 2. Weltkrieg
- galt als unentzifferbar, Entschlüsselung benötigte etwa 8 Jahre

- manuelle Entschlüsselung erwies sich als unmöglich
- Code wurde maschinell entschlüsselt
- wesentliche Werkzeuge: mathematische Analyse und Automatisierung

Endliche Automaten

Beispiel



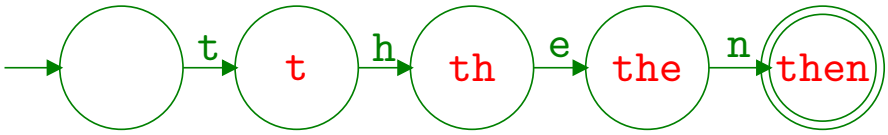
Anwendung

- Softwarebasiertes Entwickeln und Testen von Schaltkreisen
- Compilerbau: lexikalische Analyse
- Textsuche; Pattern Matching
- Softwareverifikation von Protokollen
- Spielengine in Computerspielen
- ...

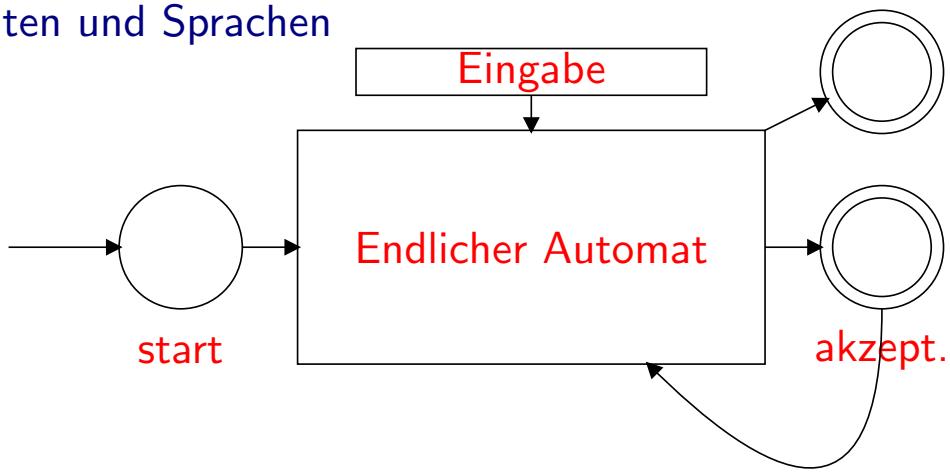
Lexikalische Analyse

Beispiel

Erkenne `then`:



Automaten und Sprachen



Beschreibungen von Automaten

endliche Automaten beschreiben

1. formale Sprachen

formale Sprachen werden durch

2. Grammatiken oder
3. reguläre Ausdrücke beschrieben

- formale Sprachen sind Mengen von Buchstabenfolgen oder Wörtern
  Wörter sind Zeichenketten über einem Alphabet, siehe DM1
- Grammatiken definieren Regeln um Wörter oder Sätze zu bilden
  - Grammatiken sind besonders geeignet zur Bearbeitung rekursiver Strukturen. Stichwort: Parsen
- reguläre Ausdrücke beschreiben Buchstabenfolgen, also Wörter
  - reguläre Ausdrücke werden zur Textsuche, in der Kommandozeile oder in Formularen verwendet

Beispiel einer "Grammatik"

$$
\begin{aligned}
\text{S} &\rightarrow \text{Pronomen Nomen Verb Adjektiv} \\
\text{Nomen} &\rightarrow \text{Lehrveranstaltungsleiter} \\
\text{Nomen} &\rightarrow \text{Vortragende} \\
\text{Pronomen} &\rightarrow \text{Unsere} \mid \text{Meine} \\
\text{Verb} &\rightarrow \text{sind} \\
\text{Adjektiv} &\rightarrow \text{lästig} \mid \text{nett} \mid \text{streng} \mid \text{zu schnell} \mid \text{anspruchsvoll}
\end{aligned}
$$

in der "Grammatik" ist der Satz

Unsere Lehrveranstaltungsleiter sind anspruchsvoll

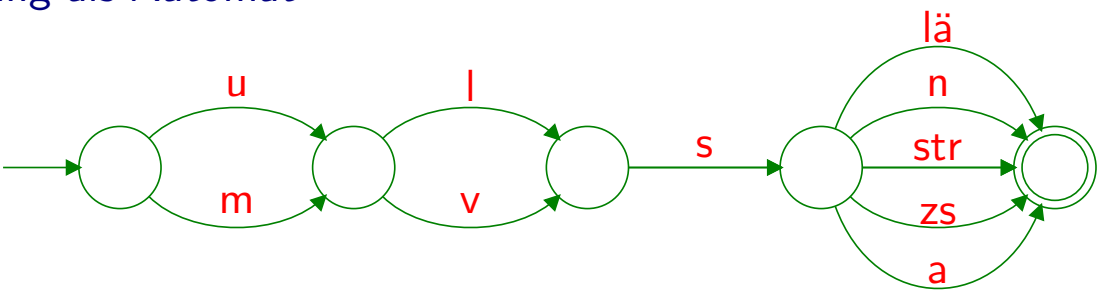
ableitbar

Komprimierte Darstellung

$$
\begin{aligned}
S &\to PNVA \\
N &\to l \mid v \\
P &\to u \mid m \\
V &\to s \\
A &\to lä \mid n \mid str \mid zs \mid a
\end{aligned}
$$

Es gilt, dass ulsa ableitbar ist.

Darstellung als Automat



Reguläre Ausdrücke

DOS `dir␣a*.exe`
Unix `^[0-9]+\.[0-9]*(E[+-]?[0-9]+)?$`

Definition

Basis

Sprache von $\varnothing$

1. $\varnothing$ ist ein regulärer Ausdruck (kurz: RA) — $\overbrace{L(\varnothing)}^{\text{Sprache von } \varnothing} := \varnothing$
2. ϵ ist ein RA — $L(\epsilon) := \{\epsilon\}$
3. Für jedes Symbol a ist $\mathbf{a}$ ein RA — $L(\mathbf{a}) := \{a\}$

Schritt

1. Für jeden RA E ist E^* ein RA — $L(E^*) := L(E)^*$
2. Für RAs E und F ist EF ein RA — $L(EF) := L(E) \cdot L(F)$
3. Für RAs E und F ist $E + F$ ein RA — $L(E + F) := L(E) \cup L(F)$
4. Wenn E ein RA ist, dann ist (E) ein RA — $L((E)) := L(E)$

Definition

für einen RA E, bezeichnet $L(E)$ die Sprache von E

Beispiel

$$\text{ulsa} \in L((u + m)(l + v)(s)(lä + n + str + zs + a))$$

Reguläre Ausdrücke in Unix (Auswahl)

.	bezeichnet jedes Zeichen
^, $	bezeichnen Zeilenanfang, bzw. Zeilenende
|	bezeichnet "oder" (also $+$)
$[a_1 a_2 \cdots a_k]$	bezeichnet $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$
$[\hat{}\, a_1 a_2 \cdots a_k]$	alle Zeichen außer $a_1, a_2, \ldots, a_k$
$[x - y]$	alle ASCII Zeichen zwischen x und y
?	heißt "keines oder eines"
+	bezeichnet "eines oder mehrere"
*	bezeichnet Kleene Stern
$R\{n\}$	"genau n Kopien" von R

Erinnerung: Beschreibungen von Automaten

endliche Automaten beschreiben

1. formale Sprachen

formale Sprachen werden durch

2. Grammatiken oder
3. reguläre Ausdrücke beschrieben

- formale Sprachen sind Mengen von Buchstabenfolgen oder Wörtern Wörter sind Zeichenketten über einem Alphabet, siehe DM1
- Grammatiken definieren Regeln um Wörter oder Sätze zu bilden
  - Grammatiken sind besonders geeignet zur Bearbeitung rekursiver Strukturen. Stichwort: Parsen
- reguläre Ausdrücke beschreiben Buchstabenfolgen, also Wörter
  - reguläre Ausdrücke werden zur Textsuche, in der Kommandozeile oder in Formularen verwendet

Ausdrucksstärke regulärer Ausdrücke

Beispiel

betrachte Sprache L, die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

Beispiel

```
<expression> ::= <condition>
  | if <condition> then <expression> fi
  | <expression> <expression>
```

Frage

Durch regulären Ausdrücke beschreibbar?

Antwort

Nein

Deterministischer endlicher Automat

Definition

ein deterministischer endlicher Automat (DEA) besteht aus

1. einer endliche Menge Q, deren Elemente Zustände heißen
2. einer endliche Menge Σ, die Eingabealphabet heißt und deren Elemente Eingabezeichen genannt werden
3. einer Abbildung
$$\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$$
die Übergangsfunktion
4. einem ausgezeichneten Zustand q_0; der Startzustand
5. einer Teilmenge $F \subseteq Q$; die akzeptierenden Zustände

die kompakteste Repräsentation eines DEA ist das Quintupel:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

Zustandstabelle

momentaner Zustand	Eingabe $a \in \Sigma$
$\vdots$	
$Q \ni p$	$\delta(p, a)$
$\vdots$	

Zustandsgraph

1. Die Ecken sind die Zustände.
2. Für Zustände p, $q \in Q$ werden die Übergänge durch markierte Kanten dargestellt:

$$(p, a, q) \quad \text{mit} \quad a \in \Sigma \quad \text{und} \quad \delta(p, a) = q$$

3. Startzustand mit Pfeil markiert; Endzustand doppelt eingekreist

Erweiterte Übergangsfunktion

Sei δ eine Übergangsfunktion, dann definiere $\widehat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$ induktiv (über Strings).

Definition

1. Basis:

$$\widehat{\delta}(p, \epsilon) := p$$

2. Schritt:

$$\widehat{\delta}(p, xa) := \delta(\widehat{\delta}(p, x), a) \qquad (x \in \Sigma^* \; a \in \Sigma)$$

Definition

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA; die Sprache $L(A)$ von A:

$$L(A) := \{x \mid \widehat{\delta}(q_0, x) \in F\}$$

Beispiel (1)

definiere DEA A, der alle aus 0en und 1en bestehenden Zeichenketten akzeptiert, die die Folge 01 enthalten

$$L = \{x01y \mid x, y \text{ sind beliebige Zeichenketten aus 0en und 1en}\}$$

L enthält etwa die Strings

$$01 \quad 11010 \quad 100011$$

q_0	A hat Sequenz 01 noch nicht gefunden A wechselt in Zustand q_1, sobald 0 gelesen wird sonst verharrt A in Zustand q_0
q_1	A hat Sequenz 0 gelesen A wechselt in Zustand q_2, sobald 1 gelesen wird sonst verharrt A in Zustand q_1
q_2	A hat Sequenz 01 gelesen A akzeptiert jede weitere Eingabe

Beispiel (2)

definiere Übergangsfunktion δ

$$\delta(q_0, 1) = q_0$$

dies entspricht dem Verharren in q_0, setze

$$\delta(q_0, 0) = q_1$$

das heißt A geht bei 0 in den Zustand q_1 und

$$\delta(q_1, 0) = q_1 \qquad \delta(q_1, 1) = q_2$$

mit

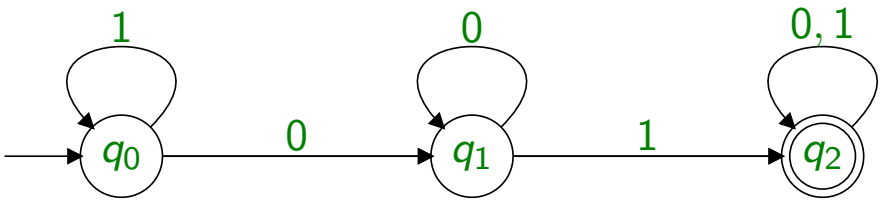
$$\delta(q_2, 0) = q_2 \qquad \delta(q_2, 1) = q_2$$

wir erhalten

$$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

Beispiel (3)

Automat A kann durch seinen Zustandsgraphen dargestellt werden:



Automat A kann durch seinen Zustandstafel dargestellt werden:

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2
$*q_2$	q_2	q_2