Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2011

Zusammenfassung der letzten LV

Definition

als Halteproblem bezeichnen wir das Problem, ob ein beliebiges Programm auf seiner Eingabe hält

Definition

Postsches Korrespondenzproblem: Gegeben zwei Listen von Strings der gleichen Länge $w_1, w_2, \dots, w_n$ und $x_1, x_2, \dots, x_n$. Gesucht sind Indizes $i_1, i_2, \dots, i_m$, sodass

$$w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$$

Satz

die folgenden Probleme sind unentscheidbar:

1. *das Halteproblem*
2. *das Postsche Korrespondenzproblem*

Turingmaschinen

Definition

eine einbändige, deterministische Turingmaschine (DTM) M ist ein 9-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen,
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen,
3. Γ eine endliche Menge von Bandsymbolen, sodass $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der linke Endmarker,
5. $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$, das Blanksymbol,
6. $\delta \colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\mathsf{L}, \mathsf{R}\}$ die Übergangsfunktion,
7. $s \in Q$, der Startzustand,
8. $t \in Q$, der akzeptierende Zustand und
9. $r \in Q$, der verwerfende Zustand mit $t \neq r$.

Turingmaschinen

Definition

eine einbändige, deterministische Turingmaschine (DTM) M ist ein 9-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen,
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen,
3. Γ eine endliche Menge von Bandsymbolen, sodass $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der linke Endmarker,
5. $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$, das Blanksymbol,
6. $\delta \colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\mathsf{L}, \mathsf{R}\}$ die Übergangsfunktion,
7. $s \in Q$, der Startzustand,
8. $t \in Q$, der akzeptierende Zustand und
9. $r \in Q$, der verwerfende Zustand mit $t \neq r$.

Beispiel

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	0	$(s, 0, \mathrm{R})$
s	1	$(s, 1, \mathrm{R})$
s	$\sqcup$	$(p, \sqcup, \mathrm{L})$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$
p	0	$(t, 1, \mathrm{L})$
p	1	$(p, 0, \mathrm{L})$
p	$\vdash$	$(t, \vdash, \mathrm{R})$

Übersicht

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Übersicht

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Konfiguration einer TM

Definition

eine Konfiguration einer TM M ist ein Tripel (p, x, n), sodass

1. $p \in Q$ Zustand,
2. $x = y\sqcup^\infty$ Bandinhalt $\qquad y \in \Gamma^*$
3. $n \in \mathbb{N}$ Position des Lese/Schreibkopfes

Konfiguration einer TM

Definition

eine Konfiguration einer TM M ist ein Tripel (p, x, n), sodass

1. $p \in Q$ Zustand,
2. $x = y\sqcup^{\infty}$ Bandinhalt $\qquad y \in \Gamma^*$
3. $n \in \mathbb{N}$ Position des Lese/Schreibkopfes

Definition

Startkonfiguration bei Eingabe $x \in \Sigma^*$:

$$(s, \vdash x\sqcup^{\infty}, 0)$$

Step Function of TMs

Definition

Relation $\xrightarrow[M]{1}$ ist wie folgt definiert:

$$(p, z, n) \xrightarrow[M]{1} \begin{cases} (q, z', n-1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, \mathrm{L}) \\ (q, z', n+1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, \mathrm{R}) \end{cases}$$

z' ist String, den wir aus z erhalten, wenn z_n durch b ersetzt

Step Function of TMs

Definition

Relation $\xrightarrow[M]{1}$ ist wie folgt definiert:

$$(p, z, n) \xrightarrow[M]{1} \begin{cases} (q, z', n-1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, \mathrm{L}) \\ (q, z', n+1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, \mathrm{R}) \end{cases}$$

z' ist String, den wir aus z erhalten, wenn z_n durch b ersetzt

Definition

reflexive, transitive Hülle $\xrightarrow[M]{*}$:

Step Function of TMs

Definition

Relation $\xrightarrow[M]{1}$ ist wie folgt definiert:

$$(p, z, n) \xrightarrow[M]{1} \begin{cases} (q, z', n-1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, \mathrm{L}) \\ (q, z', n+1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, \mathrm{R}) \end{cases}$$

z' ist String, den wir aus z erhalten, wenn z_n durch b ersetzt

Definition

reflexive, transitive Hülle $\xrightarrow[M]{*}$:

1. $\alpha \xrightarrow[M]{*} \alpha$

Step Function of TMs

Definition

Relation $\xrightarrow[M]{1}$ ist wie folgt definiert:

$$(p, z, n) \xrightarrow[M]{1} \begin{cases} (q, z', n-1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, \mathrm{L}) \\ (q, z', n+1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, \mathrm{R}) \end{cases}$$

z' ist String, den wir aus z erhalten, wenn z_n durch b ersetzt

Definition

reflexive, transitive Hülle $\xrightarrow[M]{*}$:

1. $\alpha \xrightarrow[M]{*} \alpha$
2. $\alpha \xrightarrow[M]{n+1} \beta$, wenn $\alpha \xrightarrow[M]{n} \gamma \xrightarrow[M]{1} \beta$ für Konfiguration γ

Step Function of TMs

Definition

Relation $\xrightarrow[M]{1}$ ist wie folgt definiert:

$$(p, z, n) \xrightarrow[M]{1} \begin{cases} (q, z', n-1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, \mathrm{L}) \\ (q, z', n+1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, \mathrm{R}) \end{cases}$$

z' ist String, den wir aus z erhalten, wenn z_n durch b ersetzt

Definition

reflexive, transitive Hülle $\xrightarrow[M]{*}$:

1. $\alpha \xrightarrow[M]{*} \alpha$
2. $\alpha \xrightarrow[M]{n+1} \beta$, wenn $\alpha \xrightarrow[M]{n} \gamma \xrightarrow[M]{1} \beta$ für Konfiguration γ
3. $\alpha \xrightarrow[M]{*} \beta$, wenn $\exists$ n $\alpha \xrightarrow[M]{n} \beta$

Beispiel

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	0	$(s, 0, \mathrm{R})$
s	1	$(s, 1, \mathrm{R})$
s	$\sqcup$	$(p, \sqcup, \mathrm{L})$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$
p	0	$(t, 1, \mathrm{L})$
p	1	$(p, 0, \mathrm{L})$
p	$\vdash$	$(t, \vdash, \mathrm{R})$

Beispiel

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	0	$(s, 0, \mathrm{R})$
s	1	$(s, 1, \mathrm{R})$
s	$\sqcup$	$(p, \sqcup, \mathrm{L})$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$
p	0	$(t, 1, \mathrm{L})$
p	1	$(p, 0, \mathrm{L})$
p	$\vdash$	$(t, \vdash, \mathrm{R})$

$$(s, \vdash 0010\sqcup^{\infty}, 0) \xrightarrow[M]{*}$$

$$(s, \vdash 0010\sqcup^{\infty}, 5)$$

Beispiel

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	0	$(s, 0, \mathrm{R})$
s	1	$(s, 1, \mathrm{R})$
s	$\sqcup$	$(p, \sqcup, \mathrm{L})$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$
p	0	$(t, 1, \mathrm{L})$
p	1	$(p, 0, \mathrm{L})$
p	$\vdash$	$(t, \vdash, \mathrm{R})$

$$(s, \vdash 0010\sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*}$$

$$(s, \vdash 0010\sqcup^\infty, 5) \xrightarrow[M]{1}$$

$$(p, \vdash 0010\sqcup^\infty, 4)$$

Beispiel

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	0	$(s, 0, \mathrm{R})$
s	1	$(s, 1, \mathrm{R})$
s	$\sqcup$	$(p, \sqcup, \mathrm{L})$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$
p	0	$(t, 1, \mathrm{L})$
p	1	$(p, 0, \mathrm{L})$
p	$\vdash$	$(t, \vdash, \mathrm{R})$

$$(s, \vdash 0010\sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*}$$
$$(s, \vdash 0010\sqcup^\infty, 5) \xrightarrow[M]{1}$$
$$(p, \vdash 0010\sqcup^\infty, 4) \xrightarrow[M]{1}$$
$$(t, \vdash 0011\sqcup^\infty, 3)$$

Definition

eine TM M

- akzeptiert $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists\ y,\ n$:

$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (t, y, n)$$

Definition

eine TM M

- akzeptiert $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists\ y,\ n$:

$$(s, \vdash x\sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (t, y, n)$$

- verwirft $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists\ y,\ n$:

$$(s, \vdash x\sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (r, y, n)$$

Definition

eine TM M

- akzeptiert $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists\ y,\ n$:
$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (t, y, n)$$
- verwirft $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists\ y,\ n$:
$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (r, y, n)$$
- hält bei Eingabe x, wenn x akzeptiert oder verworfen
- hält nicht bei Eingabe x, wenn x weder akzeptiert, noch verworfen

Definition

eine TM M

- akzeptiert $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists$ y, n:
$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (t, y, n)$$
- verwirft $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists$ y, n:
$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (r, y, n)$$
- hält bei Eingabe x, wenn x akzeptiert oder verworfen
- hält nicht bei Eingabe x, wenn x weder akzeptiert, noch verworfen
- ist total, wenn M auf allen Eingaben hält

Definition

eine TM M

- akzeptiert $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists\ y,\ n$:
$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (t, y, n)$$
- verwirft $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists\ y,\ n$:
$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (r, y, n)$$
- hält bei Eingabe x, wenn x akzeptiert oder verworfen
- hält nicht bei Eingabe x, wenn x weder akzeptiert, noch verworfen
- ist total, wenn M auf allen Eingaben hält

Definition

die Sprache einer TM M is wie folgt definiert:
$$\mathsf{L}(M) := \{x \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } x\}$$

Beispiel

betrachte $M = (\{s, t, r, q_0, q_1, q_0', q_1'\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1\}, \delta, s, t, r)$ mit δ:

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	0	$(q_0, \vdash, \mathrm{R})$
s	1	$(q_1, \vdash, \mathrm{R})$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$
s	$\sqcup$	$(t, \sqcup, \mathrm{L})$
q_0	0	$(q_0, 0, \mathrm{R})$
q_0	1	$(q_0, 1, \mathrm{R})$
q_0	$\sqcup$	$(q_0', \sqcup, \mathrm{L})$
q_1	0	$(q_1, 0, \mathrm{R})$
q_1	1	$(q_1, 1, \mathrm{R})$
q_1	$\sqcup$	$(q_1', \sqcup, \mathrm{L})$

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
q_0'	0	$(q, \sqcup, \mathrm{L})$
q_0'	1	$(r, 1, \mathrm{L})$
q_0'	$\vdash$	$(r, \vdash, \mathrm{R})$
q_1'	0	$(r, 1, \mathrm{L})$
q_1'	1	$(q, \sqcup, \mathrm{L})$
q_1'	$\vdash$	$(r, \vdash, \mathrm{R})$
q	0	$(q, 0, \mathrm{L})$
q	1	$(q, 1, \mathrm{L})$
q	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$

Beispiel

betrachte $M = (\{s, t, r, q_0, q_1, q_0', q_1'\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1\}, \delta, s, t, r)$ mit δ:

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	0	$(q_0, \vdash, \mathrm{R})$
s	1	$(q_1, \vdash, \mathrm{R})$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$
s	$\sqcup$	$(t, \sqcup, \mathrm{L})$
q_0	0	$(q_0, 0, \mathrm{R})$
q_0	1	$(q_0, 1, \mathrm{R})$
q_0	$\sqcup$	$(q_0', \sqcup, \mathrm{L})$
q_1	0	$(q_1, 0, \mathrm{R})$
q_1	1	$(q_1, 1, \mathrm{R})$
q_1	$\sqcup$	$(q_1', \sqcup, \mathrm{L})$

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
q_0'	0	$(q, \sqcup, \mathrm{L})$
q_0'	1	$(r, 1, \mathrm{L})$
q_0'	$\vdash$	$(r, \vdash, \mathrm{R})$
q_1'	0	$(r, 1, \mathrm{L})$
q_1'	1	$(q, \sqcup, \mathrm{L})$
q_1'	$\vdash$	$(r, \vdash, \mathrm{R})$
q	0	$(q, 0, \mathrm{L})$
q	1	$(q, 1, \mathrm{L})$
q	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$

es gilt; $\mathrm{L}(M) = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

Definition

eine Sprache L (oder allgemeine eine Menge) heißt

- rekursiv aufzählbar (r.e.), wenn $\exists$ Turingmaschine M mit $L = \mathrm{L}(M)$

Definition

eine Sprache L (oder allgemeine eine Menge) heißt

- rekursiv aufzählbar (r.e.), wenn $\exists$ Turingmaschine M mit $L = \mathrm{L}(M)$
- co-r.e. wenn L das Komplement einer r.e. Sprache

Definition

eine Sprache L (oder allgemeine eine Menge) heißt

- rekursiv aufzählbar (r.e.), wenn $\exists$ Turingmaschine M mit $L = \mathrm{L}(M)$
- co-r.e. wenn L das Komplement einer r.e. Sprache
- rekursiv, wenn $L = \mathrm{L}(M)$ und M totale TM

Definition

eine Sprache L (oder allgemeine eine Menge) heißt

- rekursiv aufzählbar (r.e.), wenn $\exists$ Turingmaschine M mit $L = \mathrm{L}(M)$
- co-r.e. wenn L das Komplement einer r.e. Sprache
- rekursiv, wenn $L = \mathrm{L}(M)$ und M totale TM

Satz

rekursive Mengen sind unter Komplementbildung abgeschlossen

Definition

eine Sprache L (oder allgemeine eine Menge) heißt

- rekursiv aufzählbar (r.e.), wenn $\exists$ Turingmaschine M mit $L = \mathrm{L}(M)$
- co-r.e. wenn L das Komplement einer r.e. Sprache
- rekursiv, wenn $L = \mathrm{L}(M)$ und M totale TM

Satz

rekursive Mengen sind unter Komplementbildung abgeschlossen

Beweis.

1. angenommen $L = \mathrm{L}(M)$, wobei die TM M total
2. definiere M' indem der akzeptierende und der verwerfende Zustand von M vertauscht wird
3. offensichtlich $\sim L = \mathrm{L}(M')$ und M' total

∎

Satz

jede rekursive Menge ist rekursiv aufzählbar, aber nicht jede rekursiv aufzählbare Menge ist rekursiv

Satz

jede rekursive Menge ist rekursiv aufzählbar, aber nicht jede rekursiv aufzählbare Menge ist rekursiv

Satz

wenn L und $\sim L$ rekursiv aufzählbar sind, dann ist L rekursiv

Satz

jede rekursive Menge ist rekursiv aufzählbar, aber nicht jede rekursiv aufzählbare Menge ist rekursiv

Satz

wenn L und $\sim L$ rekursiv aufzählbar sind, dann ist L rekursiv

Beweis.

1. $\exists$ TM M_1, M_2 mit $A = \mathrm{L}(M_1)$ und $\sim(A) = \mathrm{L}(M_2)$
2. definiere TM M', sodass das Band zwei Hälften hat

b	$\hat{b}$	a	b	a	a	a	a	b	a	a	a	$\dots$
c	c	c	d	d	d	c	$\hat{c}$	d	c	d	c	

Satz

jede rekursive Menge ist rekursiv aufzählbar, aber nicht jede rekursiv aufzählbare Menge ist rekursiv

Satz

wenn L und $\sim L$ rekursiv aufzählbar sind, dann ist L rekursiv

Beweis.

1. $\exists$ TM M_1, M_2 mit $A = \mathrm{L}(M_1)$ und $\sim(A) = \mathrm{L}(M_2)$
2. definiere TM M', sodass das Band zwei Hälften hat

b	$\hat{b}$	a	b	a	a	a	a	b	a	a	a	$\dots$
c	c	c	d	d	d	c	$\hat{c}$	d	c	d	c	

3. M_1 wird auf der oberen und M_2 auf der unteren Hälfte simuliert

Satz

jede rekursive Menge ist rekursiv aufzählbar, aber nicht jede rekursiv aufzählbare Menge ist rekursiv

Satz

wenn L und $\sim L$ rekursiv aufzählbar sind, dann ist L rekursiv

Beweis.

1. $\exists$ TM M_1, M_2 mit $A = \mathrm{L}(M_1)$ und $\sim(A) = \mathrm{L}(M_2)$
2. definiere TM M', sodass das Band zwei Hälften hat

b	$\hat{b}$	a	b	a	a	a	a	b	a	a	a	$\dots$
c	c	c	d	d	d	c	$\hat{c}$	d	c	d	c	

3. M_1 wird auf der oberen und M_2 auf der unteren Hälfte simuliert
4. wenn M_1 x akzeptiert, M' akzeptiert x
5. wenn M_2 x akzeptiert, M' verwirft x

Satz

jede rekursive Menge ist rekursiv aufzählbar, aber nicht jede rekursiv aufzählbare Menge ist rekursiv

Satz

wenn L und $\sim L$ rekursiv aufzählbar sind, dann ist L rekursiv

Beweis.

1. $\exists$ TM M_1, M_2 mit $A = \mathrm{L}(M_1)$ und $\sim(A) = \mathrm{L}(M_2)$
2. definiere TM M', sodass das Band zwei Hälften hat

b	$\hat{b}$	a	b	a	a	a	a	b	a	a	a	…
c	c	c	d	d	d	c	$\hat{c}$	d	c	d	c	…

3. M_1 wird auf der oberen und M_2 auf der unteren Hälfte simuliert
4. wenn M_1 x akzeptiert, M' akzeptiert x
5. wenn M_2 x akzeptiert, M' verwirft x

∎

Erinnerung

eine Sprache L (oder allgemeine eine Menge) heißt

- rekursiv, wenn $L = \mathrm{L}(M)$ und M totale TM
- rekursiv aufzählbar (r.e.), wenn $\exists$ Turingmaschine M mit $L = \mathrm{L}(M)$

Erinnerung

eine Sprache L (oder allgemeine eine Menge) heißt

- rekursiv, wenn $L = \mathrm{L}(M)$ und M totale TM
- rekursiv aufzählbar (r.e.), wenn $\exists$ Turingmaschine M mit $L = \mathrm{L}(M)$

Definition

Eigenschaft P heißt

- entscheidbar, wenn $\{x \mid P(x)\}$ rekursiv

Erinnerung

eine Sprache L (oder allgemeine eine Menge) heißt

- rekursiv, wenn $L = \mathrm{L}(M)$ und M totale TM
- rekursiv aufzählbar (r.e.), wenn $\exists$ Turingmaschine M mit $L = \mathrm{L}(M)$

Definition

Eigenschaft P heißt

- entscheidbar, wenn $\{x \mid P(x)\}$ rekursiv
- semi-entscheidbar, wenn $\{x \mid P(x)\}$ rekursiv aufzählbar

Erinnerung

eine Sprache L (oder allgemeine eine Menge) heißt

- rekursiv, wenn $L = \mathrm{L}(M)$ und M totale TM
- rekursiv aufzählbar (r.e.), wenn $\exists$ Turingmaschine M mit $L = \mathrm{L}(M)$

Definition

Eigenschaft P heißt

- entscheidbar, wenn $\{x \mid P(x)\}$ rekursiv
- semi-entscheidbar, wenn $\{x \mid P(x)\}$ rekursiv aufzählbar

Beispiele

- $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist rekursiv, also ist Wortumkehr entscheidbar
- das Postsche Korrespondenzproblem (PCP) ist unentscheidbar, also ist die folgende Sprache nicht rekursiv:

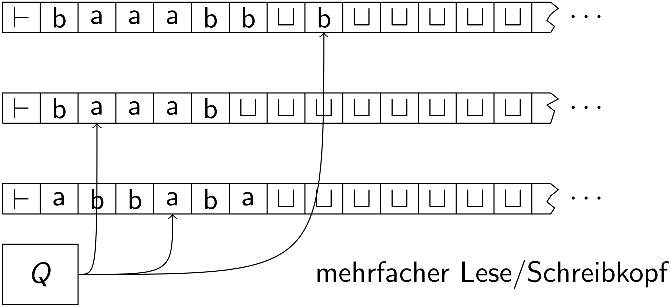
$$\{(w_1, x_1) \cdots (w_n, x_n) \mid \exists i_1 \cdots i_m \ w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_m} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}\}$$

Äquivalente Formulierungen

Äquivalente Formulierungen

Definition (informell)

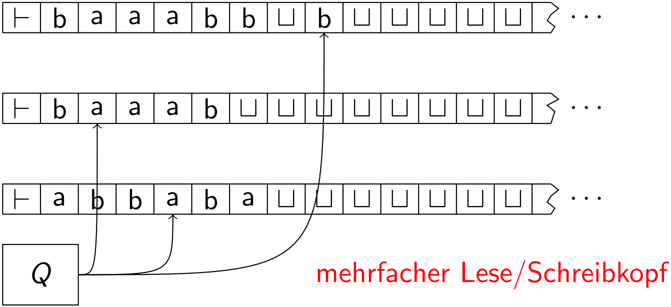
Erweiterung um mehrere Bänder und Lese/Schreibköpfe:



Äquivalente Formulierungen

Definition (informell)

Erweiterung um mehrere Bänder und Lese/Schreibköpfe:



Erweiterung der Definition

$$\delta\colon Q \times \Gamma^{3} \to Q \times \Gamma^{3} \times \{\mathsf{L}, \mathsf{R}\}^{3}$$

Beispiel

betrachte die Sprache

$$L = \{\mathrm{a}^i\mathrm{b}^j\mathrm{c}^k \mid i \times j = k \text{ und } i, j, k \geqslant 1\}$$

Beispiel

betrachte die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i \times j = k \text{ und } i, j, k \geqslant 1\}$$

Lösung (informell)

bei Eingabe w

1. lies die Eingabe und stelle fest, ob $w \in L(a^* b^* c^*)$
   wenn nicht: verwerfe
2. setze den Lesekopf des ersten Bandes auf den Bandanfang
3. markiere das erste unmarkierte a
   markiere gleich viel b's wie c's
4. lösche die Markierung der b's
   wiederhole 3 solange wie möglich
5. wenn alle c markiert sind, dann akzeptiere, sonst verwerfe

Satz

$\forall$ *DTM mit* k *Bändern* $\exists$ *einbändige DTM* M', *sodass* $\mathsf{L}(M) = \mathsf{L}(M')$

Satz

$\forall$ *DTM mit k Bändern* $\exists$ *einbändige DTM* M', *sodass* $\mathsf{L}(M) = \mathsf{L}(M')$

Beweis.

1. Bänder können nebeneinander oder übereinander simulieren

Satz

$\forall$ *DTM mit* k *Bändern* $\exists$ *einbändige DTM* M', *sodass* $\mathrm{L}(M) = \mathrm{L}(M')$

Beweis.

1. Bänder können nebeneinander oder übereinander simulieren
2. wir simulieren die Bänder übereinander, oBdA sei $k = 2$

Satz

$\forall$ *DTM mit k Bändern* $\exists$ *einbändige DTM M', sodass* $\mathrm{L}(M) = \mathrm{L}(M')$

Beweis.

1. Bänder können nebeneinander oder übereinander simulieren
2. wir simulieren die Bänder übereinander, oBdA sei $k = 2$
3. wir erweitern das Alphabet von M'

$$\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{a} \\ \hline \mathrm{c} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline \hat{\mathrm{a}} \\ \hline \mathrm{c} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline \mathrm{a} \\ \hline \hat{\mathrm{c}} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline \hat{\mathrm{a}} \\ \hline \hat{\mathrm{c}} \\ \hline \end{array}$$

4. Band von M' kann folgende Gestalt haben:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}\hline b & \hat{b} & a & b & a & a & a & a & b & a & a & a & \\ \hline c & c & c & d & d & d & c & \hat{c} & d & c & d & c & \\ \hline \end{array} \;\ldots$$

Satz

$\forall$ *DTM mit k Bändern* $\exists$ *einbändige DTM M', sodass* $\mathrm{L}(M) = \mathrm{L}(M')$

Beweis.

1. Bänder können nebeneinander oder übereinander simulieren
2. wir simulieren die Bänder übereinander, oBdA sei $k = 2$
3. wir erweitern das Alphabet von M'

a	$\hat{\text{a}}$	a	$\hat{\text{a}}$
c	c	$\hat{\text{c}}$	$\hat{\text{c}}$

4. Band von M' kann folgende Gestalt haben:

b	$\hat{b}$	a	b	a	a	a	a	b	a	a	a	$\dots$
c	c	c	d	d	d	c	$\hat{c}$	d	c	d	c	

5. alle Bänder von M sind nun repräsentiert und die Leseköpfe werden durch die Zusatzmarkierung ^ ausgedrückt

Satz

$\forall$ *DTM mit k Bändern* $\exists$ *einbändige DTM M', sodass* $\mathrm{L}(M) = \mathrm{L}(M')$

Beweis.

1. Bänder können nebeneinander oder übereinander simulieren
2. wir simulieren die Bänder übereinander, oBdA sei $k = 2$
3. wir erweitern das Alphabet von M'

a	â	a	â
c	c	ĉ	ĉ

4. Band von M' kann folgende Gestalt haben:

b	$\hat{b}$	a	b	a	a	a	a	b	a	a	a	…
c	c	c	d	d	d	c	$\hat{c}$	d	c	d	c	

5. alle Bänder von M sind nun repräsentiert und die Leseköpfe werden durch die Zusatzmarkierung ^ ausgedrückt

$\blacksquare$

Nichtdeterministische Turingmaschine

Definition

eine *k-bändige*, nichtdeterministische TM (NTM) N ist ein 9-Tupel

$$N = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

Nichtdeterministische Turingmaschine

Definition

eine k-bändige, nichtdeterministische TM (NTM) N ist ein 9-Tupel

$$N = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen,

Nichtdeterministische Turingmaschine

Definition

eine k-bändige, nichtdeterministische TM (NTM) N ist ein 9-Tupel

$$N = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen,
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen,

Nichtdeterministische Turingmaschine

Definition

eine k-bändige, nichtdeterministische TM (NTM) N ist ein 9-Tupel

$$N = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen,
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen,
3. Γ eine endliche Menge von Bandsymbolen, sodass $\Sigma \subseteq \Gamma$,

Nichtdeterministische Turingmaschine

Definition

eine k-bändige, nichtdeterministische TM (NTM) N ist ein 9-Tupel

$$N = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen,
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen,
3. Γ eine endliche Menge von Bandsymbolen, sodass $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der linke Endmarker,

Nichtdeterministische Turingmaschine

Definition

eine k-bändige, nichtdeterministische TM (NTM) N ist ein 9-Tupel

$$N = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen,
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen,
3. Γ eine endliche Menge von Bandsymbolen, sodass $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der linke Endmarker,
5. $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$, das Blanksymbol,

Nichtdeterministische Turingmaschine

Definition

eine k-bändige, nichtdeterministische TM (NTM) N ist ein 9-Tupel

$$N = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen,
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen,
3. Γ eine endliche Menge von Bandsymbolen, sodass $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der linke Endmarker,
5. $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$, das Blanksymbol,
6. $\delta \colon Q \times \Gamma^k \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^k \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}^k)$ die Übergangsfunktion,

Nichtdeterministische Turingmaschine

Definition

eine k-bändige, nichtdeterministische TM (NTM) N ist ein 9-Tupel

$$N = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen,
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen,
3. Γ eine endliche Menge von Bandsymbolen, sodass $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der linke Endmarker,
5. $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$, das Blanksymbol,
6. $\delta \colon Q \times \Gamma^k \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^k \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}^k)$ die Übergangsfunktion,
7. $s \in Q$, der Startzustand,

Nichtdeterministische Turingmaschine

Definition

eine k-bändige, nichtdeterministische TM (NTM) N ist ein 9-Tupel

$$N = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen,
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen,
3. Γ eine endliche Menge von Bandsymbolen, sodass $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der linke Endmarker,
5. $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$, das Blanksymbol,
6. $\delta \colon Q \times \Gamma^k \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^k \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}^k)$ die Übergangsfunktion,
7. $s \in Q$, der Startzustand,
8. $t \in Q$, der akzeptierende Zustand und

Nichtdeterministische Turingmaschine

Definition

eine k-bändige, nichtdeterministische TM (NTM) N ist ein 9-Tupel

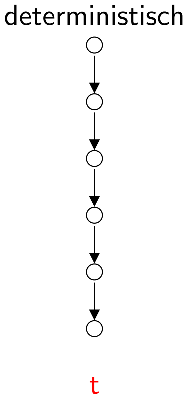
$$N = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

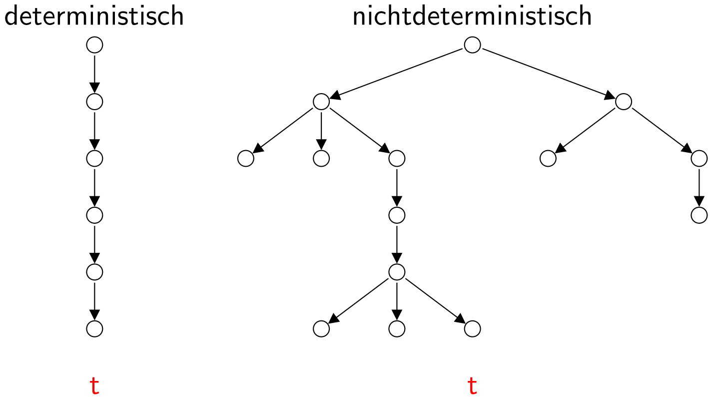
1. Q eine endliche Menge von Zuständen,
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen,
3. Γ eine endliche Menge von Bandsymbolen, sodass $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der linke Endmarker,
5. $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$, das Blanksymbol,
6. $\delta \colon Q \times \Gamma^k \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^k \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}^k)$ die Übergangsfunktion,
7. $s \in Q$, der Startzustand,
8. $t \in Q$, der akzeptierende Zustand und
9. $r \in Q$, der verwerfende Zustand mit $t \neq r$.

Nichtdeterministischer Berechnungsbaum

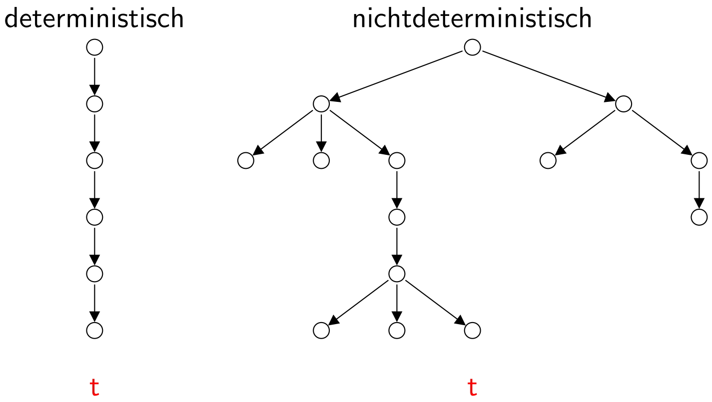
Nichtdeterministischer Berechnungsbaum



Nichtdeterministischer Berechnungsbaum



Nichtdeterministischer Berechnungsbaum



Beobachtung

damit NTM N akzeptiert, genügt ein Pfad, sodass N in den akzeptierenden Zustand gelangt

Nichtdeterminismus vs. Determinisums

Satz

- $\forall$ *N einbändige NTM,* $\exists$ *dreibändige DTM* M*, sodass* $\mathsf{L}(M) = \mathsf{L}(N)$
- *jede DTM ist auch eine NTM*