Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2011

Zusammenfassung der letzten LV

Definition

eine TM U heißt universell, wenn bei Eingabe

- des Codes $\ulcorner M \urcorner$ einer TM M
- und des Codes $\ulcorner x \urcorner$ einer Eingabe x für M

die TM U, die TM M auf x simuliert

1. U kontrolliert Korrektheit der Codes; wenn inkorrekt, verwirft U
2. U simuliert M mit 3 Bändern auf der Eingabe x
   - Band 1 enthält die Beschreibung von M
   - Band 2 enthält das (dekodierte) Eingabewort x
   - Band 3 enthält (simulierten) Bandinhalt des Bandes von M
3. wenn M jemals auf der Eingabe x hält, hält U ebenfalls und akzeptiert; beziehungsweise verwirft entsprechend

Übersicht

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Definition

definiere Halteproblem und Zugehörigkeitsproblem von TMs

$$\mathsf{HP} := \{M\sharp x \mid M \text{ hält bei Eingabe } x\}$$
$$\mathsf{MP} := \{M\sharp x \mid x \in \mathsf{L}(M)\}$$

Definition

1. M_x ist TM (mit Eingabealphabet $\{0,1\}$) deren Code (mit Kodierungsalphabet $\{0,1\}$) gleich x
2. wenn x kein Code, definiere M_x beliebig

Aufzählung aller Turingmaschinen

$$M_\epsilon, M_0, M_1, M_{00}, M_{01}, M_{10}, M_{11}, M_{000}, \ldots$$

	ϵ	0	1	00	01	10	11	000	001	010	...
M_ϵ	✓	⟳	⟳	✓	✓	⟳	✓	⟳	✓	✓	
M_0	⟳	⟳	✓	✓	⟳	✓	✓	⟳	⟳	✓	
M_1	⟳	✓	⟳	✓	⟳	✓	✓	⟳	⟳	✓	
M_{00}	✓	⟳	⟳	✓	✓	✓	✓	⟳	⟳	✓	
M_{01}	✓	✓	✓	✓	⟳	⟳	⟳	✓	✓	⟳	...
M_{10}	✓	✓	⟳	✓	✓	⟳	✓	✓	⟳	✓	
M_{11}	✓	✓	⟳	⟳	✓	⟳	✓	⟳	✓	⟳	
M_{000}	✓	✓	✓	✓	⟳	✓	✓	⟳	✓	⟳	
M_{001}	⟳	✓	✓	✓	✓	⟳	✓	✓	✓	✓	
$\vdots$					$\vdots$						$\ddots$

Behauptung

die dem Komplement der Diagonale entsprechende Sprache wird von keiner der TMs:

$$M_\epsilon, M_0, M_1, M_{00}, M_{01}, M_{10}, M_{11}, M_{000}, \ldots$$

akzeptiert

Behauptung

die dem Komplement der Diagonale entsprechende Sprache wird von keiner TM in der Aufzählung akzeptiert

Beweis.

sei $\Sigma \supseteq \{✓, ⟳\}$ ein Alphabet

$s_0, s_1, s_2, \ldots$ eine Folge unendlicher Wörter über $\{✓, ⟳\}$

$$s_0 = s_{00}s_{01}s_{02}s_{03}s_{04}\ldots$$
$$s_1 = s_{10}s_{11}s_{12}s_{13}s_{14}\ldots$$
$$s_1 = s_{20}s_{21}s_{22}s_{23}s_{24}\ldots$$
$$\vdots$$

dann ist die Folge

$$d_n = \begin{cases} ⟳ & \text{wenn } s_{nn} = ✓ \\ ✓ & \text{wenn } s_{nn} = ⟳ \end{cases}$$

eine neue Folge ∎

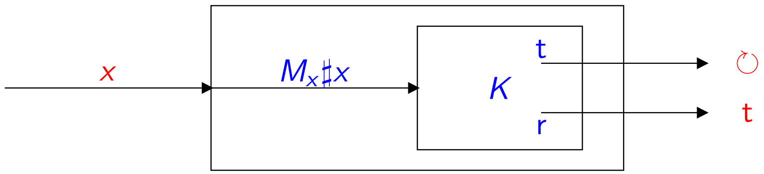
Satz

HP *ist nicht rekursiv, aber rekursiv aufzählbar*

Beweis.

wir zeigen Nicht-Rekursivität

1. angenommen $\exists$ totale TM K, sodass HP $= \mathrm{L}(K)$
2. Definition von TM D



3. D akzeptiert genau die dem Komplement der Diagonale entsprechende Sprache
4. Verhalten von D verschieden von jeder TM M_x in der Aufzählung; Widerspruch

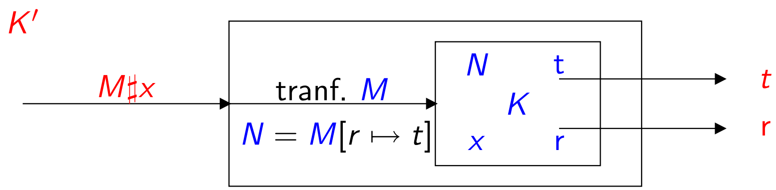
∎

Satz

MP *ist nicht rekursiv, aber rekursiv aufzählbar*

Beweisskizze

1. um zu zeigen, dass MP rekursiv aufzählbar, definiere UTM U, die bei Eingabe $M\sharp x$, TM M auf x simuliert
2. um zu zeigen, dass MP nicht rekursiv ist, verwende Reduktion vom Halteproblem
   sei K eine totale TM, sodass MP $= \mathrm{L}(K)$; definiere K' (totale) TM, sodass HP $= \mathrm{L}(K')$:



∎

Reduktionen

Definition

1. $\exists$ totale DTM T mit Eingabealphabet Σ
2. bei Eingabe $x \in \Sigma^*$, schreibt T $f(x)$ auf das (erste) Band

dann heißt $f \colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ berechenbar

Definition

1. $\exists\, R \colon \Sigma^* \to \Sigma^*$
2. R berechenbar
3. für $L \subseteq \Sigma^*$, $M \subseteq \Sigma^*$ gilt $x \in L \iff R(x) \in M$

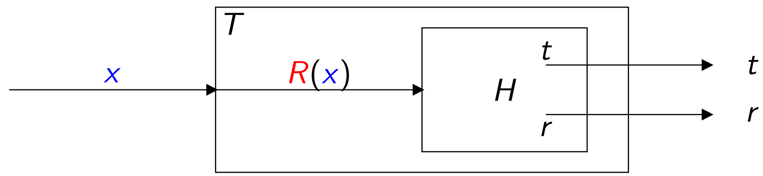
dann ist L auf M reduzierbar; kurz: $L \leqslant_m M$

Reduktionen im Bild

angenommen

- L, M Sprachen über Σ
- $L \leqslant_m M$ mit $R \colon \Sigma^* \to \Sigma^*$
- die Reduktion R wird von TM T berechnet

$$x \in L \iff R(x) \in M$$



Lemma

wenn $L \leqslant_m M$ und M rekursiv, dann ist L rekursiv

Satz

jede rekursive Menge ist rekursiv aufzählbar, aber nicht jede rekursiv aufzählbare Menge ist rekursiv

Satz

es kann kein Testprogramm für "hello, world" Programme geben

Beweis.

$$\text{HP} \leqslant_m \text{“hello, world” Programme}$$

∎

Satz

die folgenden Probleme sind unentscheidbar:

1. *das Postsche Korrespondenzproblem*
2. *ist eine beliebige Sprache regulär?*