Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2011

Zusammenfassung der letzten LV

Satz

jede rekursive Menge ist rekursiv aufzählbar, aber nicht jede rekursiv aufzählbare Menge ist rekursiv

Satz

es kann kein Testprogramm für "hello, world" Programme geben

Satz

die folgenden Probleme sind unentscheidbar:

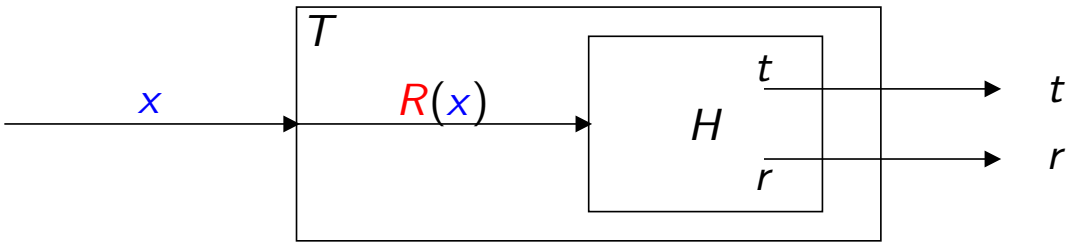
1. *das Postsche Korrespondenzproblem*
2. *ist eine beliebige Sprache regulär?*

Reduktionen im Bild

angenommen

- L, M Sprachen über Σ
- $L \leqslant_m M$ mit $R\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$
- die Reduktion R wird von TM T berechnet

$$x \in L \iff R(x) \in M$$



Lemma

wenn $L \leqslant_m M$ und M rekursiv, dann ist L rekursiv

Übersicht

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Einführung in die Komplexitätstheorie

Definition

Komplexitätstheorie analysiert Algorithmen und Probleme:

Welche Resourcen benötigt ein bestimmter Algorithmus oder ein Problem?

Resourcen

- Speicherplatz
- Rechenzeit

Problem & Algorithmus

wir unterscheiden zwischen

- der Komplexität eines Algorithmus — `quicksort` hat $O(n \cdot \log n)$
- der Komplexität eines Problems — MAZE ist in P

(n ist die Länge der zu sortierenden Liste)

Problem MAZE

Definition (MAZE)

gegeben

- gerichteten Graph G mit Eckenmenge E
- Ecken $s, t \in E$

$\exists$ Weg zwischen s und t?

Algorithmus

Nachfolgersuche — DM1

Komplexität

- Zeitkomplexität: $O(n^2)$
- Platzbedarf: $O(n)$

wobei n Anzahl der Ecken

Problem "Traveling Salesperson Problem" (TSP)

Definition (TSP)

gegeben

- n Städte
- Distanz $d_{ij} > 0$, sodass $d_{ij} = d_{ji}$

gesucht: Minimum der Kostensumme:

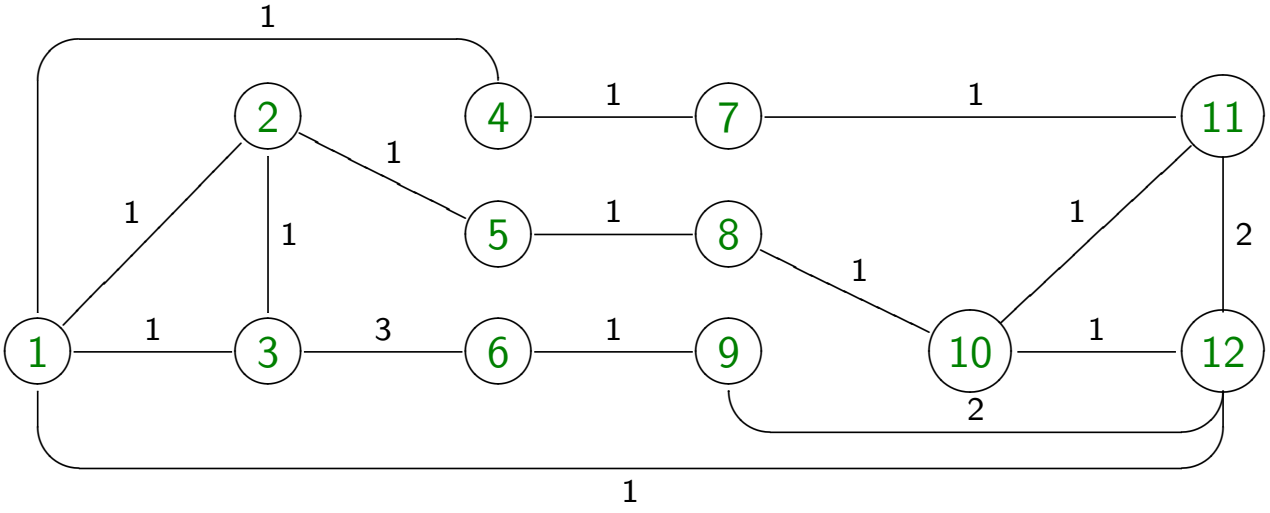
$$\sum_{i=1}^{n} d_{\pi(i),\pi(i+1)}$$

$\pi\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ ist Permutation mit der Erweiterung $\pi(n+1) := \pi(1)$; wir bezeichnen diese Permutation auch als Tour

Bemerkung

Tour kann in jeder beliebigen Stadt beginnen, muss aber wieder zum Ausgangspunkt zurück

Beispiel



1. $\exists$ Tour die alle Städte verbindet? Ja
2. $\exists$ Tour mit Budget $\leqslant 10$? Nein
3. $\exists$ Tour mit Budget $\leqslant 20$? Ja
4. minimale Tour:

$$(1, 4, 7, 11, 10, 8, 5, 2, 3, 6, 9, 12, 1) \qquad \text{Budget} = 15$$

Algorithmus

1. Aufzählen aller möglichen Lösungen
2. berechne die Kosten
3. wähle die Tour mit den geringsten Kosten

Komplexität

1. Zeitkomplexität: $O(n!)$
2. Zeitkomplexität kann auf $2^{O(n)}$ verbessert werden

hier bezeichnet n die Anzahl der Städte

Bemerkung

- wenn ein polynomieller Algorithmus existiert, dann gilt P = NP
- die Frage ob P = NP ist eines der 7 Milleniumprobleme des Clay Institutes
- wenn ein polynomieller Algorithmus existiert, sind online Transaktionen (RSA-Verschlüsselung) unsicher

Problem: "Generalised Geography" (GG)

Definition (GG)

das Spiel verallgemeinerte Länderkunde ist ein Zweipersonenspiel
Spieler heißen Anna und Otto, gegeben

1. gerichteter Graph G und Startknoten s
2. Anna beginnt im Land s sie wählt ein erreichbares (unmarkiertes) Land t, welches sie markiert
3. Otto zieht von t weiter und markiert wieder
4. derjenige Spieler, der nicht mehr ziehen kann verliert

$\exists$ Gewinnstrategie für Anna?

Beispiel

Länderkunde

Algorithmus A

Eingabe (G, b)

1. sei b der aktuelle Knoten und habe dieser Ausgangsgrad 0; Spieler 1 verliert immer und A verwirft
2. eliminiere Knoten b und alle wegführenden Kanten; bezeichne den neuen Graphen mit G'
3. $\forall$ unmittelbaren Nachfolger b' von b, rufe A rekursiv mit (G', b') auf
4. wenn alle Aufrufe akzeptieren, hat Spieler 2 eine Gewinnstrategie
5. wenn ein Aufruf nicht akzeptiert, hat Spieler 1 eine Gewinnstrategie; also akzeptiert A

Komplexität

- Platzkomplexität: $O(n)$
- nur der Rekursionsstack braucht Platz, die Rekursionstiefe ist n

wobei n die Anzahl der Ecken von G

Laufzeitkomplexität

Definition

sei M eine totale Mehrband-DTM

- die Laufzeitkomplexität von M ist Funktion $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, T misst maximale Anzahl der Schritte (Konfigurationszüge) auf allen Eingaben
- $T(n)$ is die Laufzeit von M, wenn n die Länge der Eingabe
- M heißt $T(n)$-Zeit-Turingmaschine

Definition

sei $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine numerische Funktion; die deterministische Zeitkomplexitätsklasse $\mathrm{DTIME}(T(n))$:

$$\mathrm{DTIME}(T(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine totale DTM mit Laufzeit in } O(T(n)) \}$$

Beispiel

betrachte MAZE as Sprache:

$$\text{MAZE} = \{(G, s, t) \mid G \text{ Graph mit Weg von } s \text{ nach } t\}$$

es gilt $\text{MAZE} \in \text{DTIME}(n^2)$

Definition

$$\text{P} = \bigcup_{k \geqslant 1} \text{DTIME}(n^k)$$

Definition

- ein Verifikator einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, ist ein Algorithmus V sodass

$$L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\ c, \text{ sodass } V \text{ akzeptiert Eingabe } (x, c)\}$$

- ein polytime Verifikator ist ein Verifikator mit Laufzeit $O(n^k)$ wobei $n = \ell(x)$
- Wort c wird Zertifikat genannt

Definition

NP ist die Klasse der Sprachen, die einen polytime Verifikator haben

Beispiel

betrachte TSP als Sprache

$$\text{TSP} = \{(G, b, B) \mid \exists \text{ Tour in } G \text{ hat mit Bewertung } \leqslant B\ \}$$

definiere Verifikator V für TSP mit Eingabe:

- (G, b, B), die Instanz des Problems
- Tour H, das Zertifikat

1. V prüft of H eine Tour ist und Bewertung $\leqslant B$
2. wenn ja, akzeptiert V, sonst verwirft V
3. V läuft in polynomieller Zeit

also gilt $\text{TSP} \in \text{NP}$

Definition

sei N eine totale Mehrband-NTM

- die Laufzeitkomplexität von N ist Funktion $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  T misst die maximale Anzahl von Schritten von N
  auf allen Eingaben in jedem möglichen Berechnungspfad

Definition

sei $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine numerische Funktion; die nichtdeterministische Zeitkomplexitätsklasse NTIME$(T(n))$ ist definiert als:

$$\text{NTIME}(T(n)) = \{\text{L}(N) \mid N \text{ ist eine totale NTM mit Laufzeit in } \text{O}(T(n)) \}$$

Definition

$$\text{NP}' = \bigcup_{k \geqslant 1} \text{NTIME}(n^k)$$

Lemma

wenn $L \in \text{NP}$, *dann* $L \in \text{NP}'$

Beweis.

1. sei V ein Verifikator für L
2. V läuft in polynomieller Zeit auf Eingabe (x, c),
   das heißt V läuft in Zeit $\text{O}(\ell(x)^k)$ für geeignetes k
3. definiere NTM N mit Eingabe x
   - rate (nichtdeterministisch) String c mit $\ell(c) = \ell(x)^k$
   - simuliere V auf (x, c)
   - wenn V akzeptiert, dann akzeptiert N, sonst verwirft V

   Algorithmus ist nichtdeterministisch

Beispiel

$\text{TSP} \in \text{NP}'$

Lemma

wenn $L \in \mathrm{NP}'$, *dann* $L \in \mathrm{NP}$

Beweis.

1. sei $L \in \mathrm{NP}'$; $\exists$ NTM N, sodass $L = \mathrm{L}(N)$
2. N hat polynomielle nichtdeterministische Zeitkomplexität
3. definiere einen polytime Verifikator V mit Eingabe (x, c), wobei c den erfolgreichen Pfad im Berechnungsbaum codiert
   - simuliere N auf x
   - verwende Zertifikat c um Nichtdeterminismus aufzulösen

   Algorithmus ist deterministisch
4. wenn N akzeptiert, akzeptiert V, ansonsten verwirft V

Satz

$\mathrm{NP} = \mathrm{NP}'$

Reduktionen (in polynomieller Zeit)

Definition

1. $\exists$ deterministische, totale TM T mit Eingabealphabet Σ
2. T läuft in polynomieller Zeit
3. bei Eingabe $x \in \Sigma^*$, schreibt T $f(x)$ auf das (erste) Band

dann heißt $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ in polynomieller Zeit berechenbar

Definition

1. $\exists$ $R : \Sigma^* \to \Sigma^*$
2. R berechenbar in polynomieller Zeit
3. für $L \subseteq \Sigma^*$, $M \subseteq \Sigma^*$ gilt $x \in L \iff R(x) \in M$

dann ist L (in polynomieller Zeit) auf M reduzierbar; kurz: $L \leqslant_m^{\mathrm{p}} M$

Vollständigkeit von Komplexitätsklassen

Definition

1. $\mathcal{C}$ eine beliebige Komplexitätsklasse
2. M eine Sprache über Σ und
3. $\forall$ Sprachen $L \in \mathcal{C}$ gilt: $L \leqslant_m^p M$

dann ist M $\leqslant_m^p$-hart für $\mathcal{C}$

Beispiel

TSP ist $\leqslant_m^p$-hart für NP

Definition

für eine Sprache M, sei

1. M $\leqslant_m^p$-hart für $\mathcal{C}$ und
2. $M \in \mathcal{C}$

dann ist M $\leqslant_m^p$-vollständig für $\mathcal{C}$ oder (kurz) $\mathcal{C}$-vollständig

NP-Vollständigkeit von TSP

Satz

TSP *ist* $\leqslant_m^p$*-vollständig für* NP

Folgerung

- *wenn* $\exists$ *polynomieller Algorithmus für* TSP, *dann*
- $\exists$ *polynomieller Algorithmus* $\forall$ *Probleme in* NP

Beispiele

- MAZE $\in$ NP, aber MAZE ist nicht hart für NP
- definiere GG als Sprache

$$\text{GG} = \{(G, s) \mid \text{gerichteter Graph } G, \text{ Startknoten } s, \exists \text{ Gewinn-strategie für Anna}\}$$

GG ist hart für NP, aber GG $\notin$ NP