Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2011

Zusammenfassung der letzten LV

Definition

ein deterministischer endlicher Automat besteht aus

1. einer endliche Menge Q, deren Elemente Zustände heißen
2. einer endliche Menge Σ, die Eingabealphabet heißt und deren Elemente Eingabezeichen genannt werden
3. einer Abbildung
$$\delta \colon Q \times \Sigma \to Q$$
die Übergangsfunktion
4. einem ausgezeichneten Zustand q_0; der Startzustand
5. einer Teilmenge $F \subseteq Q$; die akzeptierenden Zustände

die kompakteste Repräsentation eines DEA ist das Quintupel:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

Definition

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA; die Sprache $\mathrm{L}(A)$ von A:

$$\mathrm{L}(A) := \{x \mid \widehat{\delta}(q_0, x) \in F\}$$

hier bezeichnet $\widehat{\delta}$ die Erweiterung von δ auf Wörter

Beispiel

definiere DEA A, der alle aus 0en und 1en bestehenden Zeichenketten akzeptiert, die die Folge 01 enthalten

$$L = \{x01y \mid x, y \text{ sind beliebige Zeichenketten aus 0en und 1en}\}$$

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2
$*q_2$	q_2	q_2

Übersicht

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turing Maschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

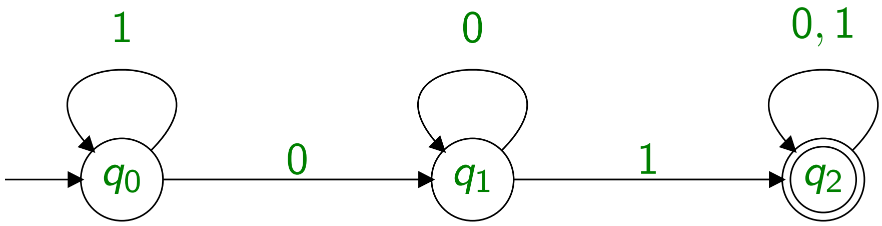
Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

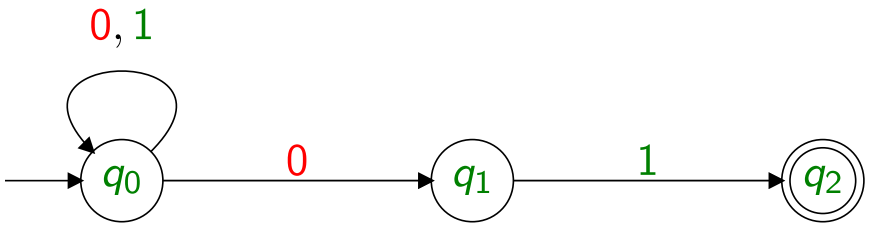
Frage

Wie definiert man einen Automaten, der alle Binärstrings akzeptiert, die in 01 enden?

Automat A

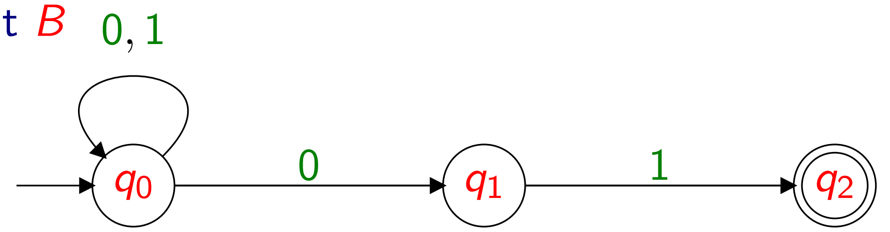


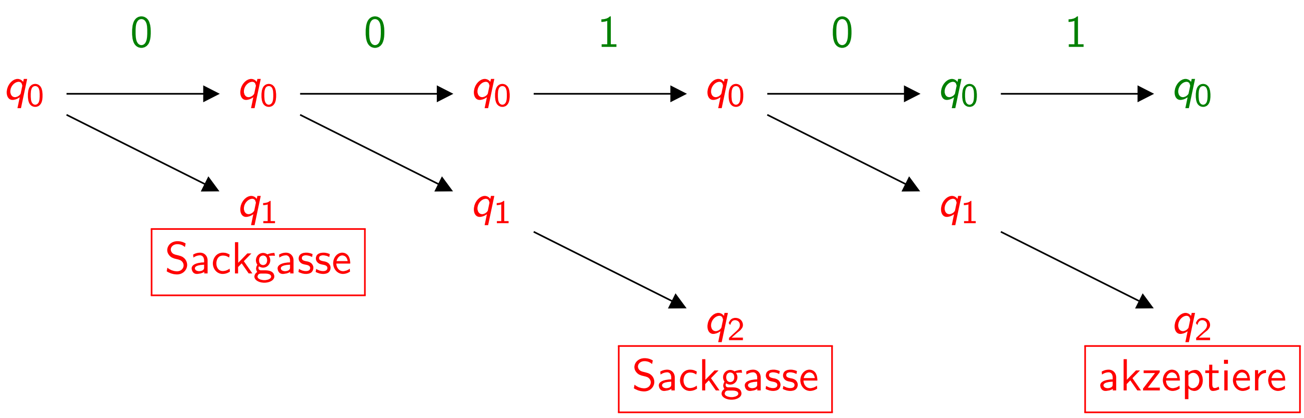
Automat B



Nichtdeterminismus

Automat B





Nichtdeterministischer Endlicher Automat

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA) ist gegeben durch

1. eine endliche Menge Q, deren Elemente Zustände heißen
2. eine endliche Menge Σ, die Eingabealphabet heißt und deren Elemente Eingabezeichen genannt werden,
3. eine Abbildung
   $$\delta \colon Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$$
   die Übergangsfunktion
4. einen ausgezeichneten Zustand q_0; den Startzustand
5. eine Teilmenge $F \subseteq Q$; die akzeptierenden Zustände

kompakteste Repräsentation eines NEA ist das Quintupel:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

Alternative Repräsentationen

Beispiel

der NEA

$$B = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

kann auch wie folgt definiert werden:

3. δ definiert durch folgende Zustandstafel:

	0	1
$\to q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

Beispiel

alternativ, repräsentiere NEA B mit Hilfe eines Zustandsgraphen, wie oben

Definition

δ die Übergangsfunktion eines NEA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$; für N definiere die erweiterte Übergangsfunktion $\widehat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$:

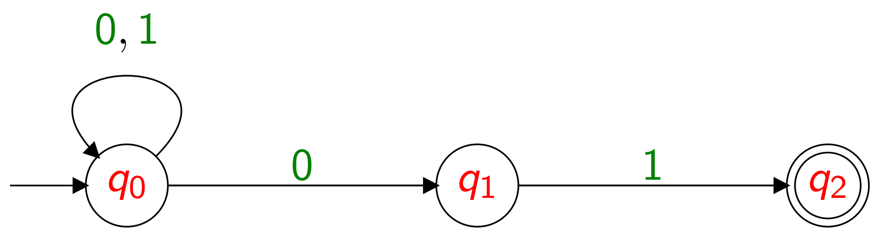
1. Basis $\widehat{\delta}(p, \epsilon) := \{p\}$
2. Schritt sei $x = ya$; angenommen $\widehat{\delta}(p, y) = \{q_1, \ldots, q_k\}$ und
$$\bigcup_{i=1}^{k} \delta(q_i, a) = \{r_1, \ldots, r_m\}$$
setze
$$\widehat{\delta}(p, ya) = \{r_1, \ldots, r_m\} = \bigcup_{q \in \widehat{\delta}(p,y)} \delta(q, a)$$

Definition

die Sprache von NEA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:
$$L(N) := \{x \mid \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing\}$$

Erweiterte Übergangsfunktion

Beispiel



- $\widehat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$
- $\widehat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
- $\widehat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\}$
- $\widehat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$
- $\widehat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\}$
- $\widehat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

Teilmengenkonstruktion

Definition

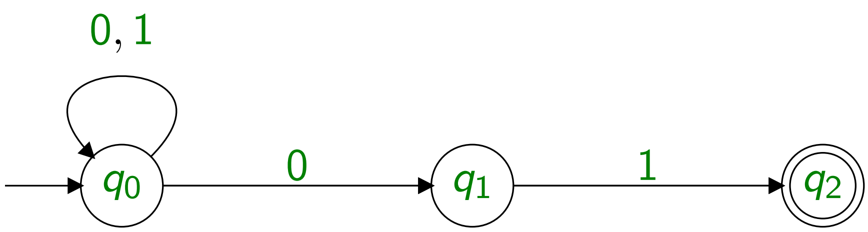
sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$, konstruiere deterministische Automaten

$$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$$

übrige Komponenten für D:

1. Q_D ist die Menge aller Teilmengen von Q_N
2. zur Berechnung von δ_D betrachten wir jede Teilmenge $S \subseteq Q_N$ und jedes $a \in \Sigma$; wir setzen:
$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$
3. F_D ist definiert als die Menge
$$\{S \subseteq Q_N \mid S \cap F_N \neq \varnothing\}$$

Beispiel



Teilmengenkonstruktion

	0	1
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\to \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$* \{q_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$* \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$* \{q_1, q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$* \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Teilmengenkonstruktion (2)

wir benennen die Zustände im erhaltenen DEA um:

$\varnothing$	A	$\{q_0\}$	B	$\{q_1\}$	C	$\{q_2\}$	D
$\{q_0, q_1\}$	E	$\{q_0, q_2\}$	F	$\{q_1, q_2\}$	G	$\{q_0, q_1, q_2\}$	H

	0	1	
A	A	A	nicht erreichbar
$\rightarrow B$	E	B	
C	A	D	nicht erreichbar
$*D$	A	A	nicht erreichbar
E	E	F	
$*F$	E	B	
$*G$	A	D	nicht erreichbar
$*H$	E	F	nicht erreichbar

Definition

definiere jene Teilmengen von Q_N, die erreichbar sind:

1. Basis: Sei q_0 der Startzustand von N; dann ist $\{q_0\}$ erreichbar
2. Schritt: Angenommen die Menge S ist erreichbar; dann ist für jeden Eingabebuchstaben a, die Teilmenge $\delta_D(S, a)$ erreichbar

Beispiel

	0	1	erreichbar
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	✓
$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	
$\{q_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	✓
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	✓
$*\{q_1, q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	