# Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2011





## Zusammenfassung der letzten LV

### Definition

ein deterministischer endlicher Automat besteht aus

1. einer endliche Menge $Q$, deren Elemente Zustände heißen
2. einer endliche Menge $\Sigma$, die Eingabealphabet heißt und deren Elemente Eingabezeichen genannt werden
3. einer Abbildung
$$\delta \colon Q \times \Sigma \to Q$$
die Übergangsfunktion
4. einem ausgezeichneten Zustand $q_0$; der Startzustand
5. einer Teilmenge $F \subseteq Q$; die akzeptierenden Zustände

die kompakteste Repräsentation eines DEA ist das Quintupel:
$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$





### Definition

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA; die Sprache $\mathsf{L}(A)$ von $A$:
$$\mathsf{L}(A) := \{x \mid \widehat{\delta}(q_0, x) \in F\}$$
hier bezeichnet $\widehat{\delta}$ die Erweiterung von $\delta$ auf Wörter

### Beispiel

definiere DEA $A$, der alle aus 0en und 1en bestehenden Zeichenketten akzeptiert, die die Folge 01 enthalten
$$L = \{x01y \mid x, y \text{ sind beliebige Zeichenketten aus 0en und 1en}\}$$

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\to q_0$ | $q_1$ | $q_0$ |
| $q_1$ | $q_1$ | $q_2$ |
| $*q_2$ | $q_2$ | $q_2$ |





## Übersicht

### Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, $\epsilon$-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

### Berechenbarkeitstheorie

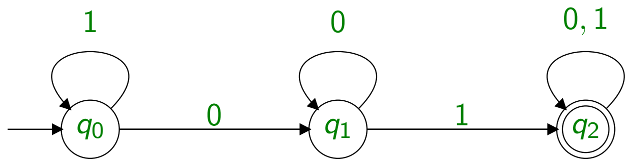
Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turing Maschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

### Komplexitätstheorie

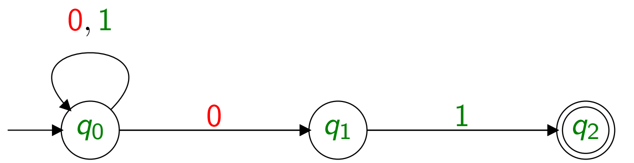
Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

### Frage
Wie definiert man einen Automaten, der alle Binärstrings akzeptiert, die in 01 enden?

### Automat A




### Automat $B$

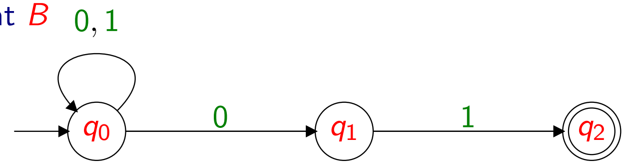


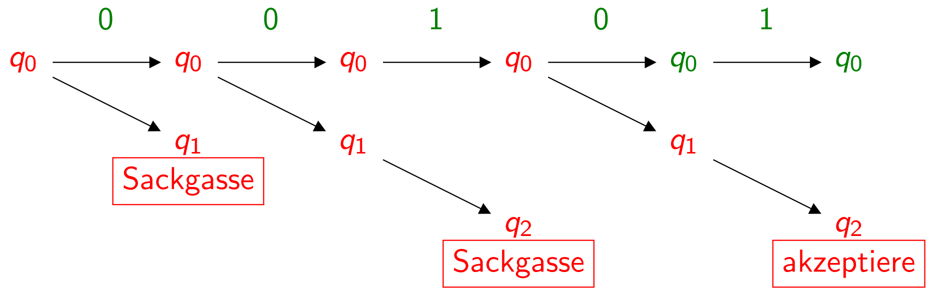





## Nichtdeterminismus

### Automat $B$








## Nichtdeterministischer Endlicher Automat

### Definition
Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA) ist gegeben durch

1. eine endliche Menge $Q$, deren Elemente Zustände heißen
2. eine endliche Menge $\Sigma$, die Eingabealphabet heißt und deren Elemente Eingabezeichen genannt werden,
3. eine Abbildung
$$\delta\colon Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$$
die Übergangsfunktion
4. einen ausgezeichneten Zustand $q_0$; den Startzustand
5. eine Teilmenge $F \subseteq Q$; die akzeptierenden Zustände

kompakteste Repräsentation eines NEA ist das Quintupel:
$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$





## Alternative Repräsentationen

### Beispiel
der NEA
$$B = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$
kann auch wie folgt definiert werden:

3. $\delta$ definiert durch folgende Zustandstafel:

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\to q_0$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0\}$ |
| $q_1$ | $\varnothing$ | $\{q_2\}$ |
| $*q_2$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |

### Beispiel
alternativ, repräsentiere NEA $B$ mit Hilfe eines Zustandsgraphen, wie oben

### Definition

$\delta$ die Übergangsfunktion eines NEA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$; für $N$ definiere die erweiterte Übergangsfunktion $\widehat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$:

1. Basis $\widehat{\delta}(p, \epsilon) := \{p\}$
2. Schritt sei $x = ya$; angenommen $\widehat{\delta}(p, y) = \{q_1, \ldots, q_k\}$ und
$$\bigcup_{i=1}^{k} \delta(q_i, a) = \{r_1, \ldots, r_m\}$$
setze
$$\widehat{\delta}(p, ya) = \{r_1, \ldots, r_m\} = \bigcup_{q \in \widehat{\delta}(p,y)} \delta(q, a)$$

### Definition

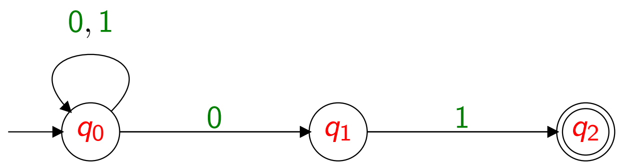
die Sprache von NEA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:
$$L(N) := \{x \mid \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing\}$$





## Erweiterte Übergangsfunktion

### Beispiel




- $\widehat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$
- $\widehat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
- $\widehat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\}$
- $\widehat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$
- $\widehat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\}$
- $\widehat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$





## Teilmengenkonstruktion

### Definition

sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$, konstruiere deterministische Automaten
$$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$$

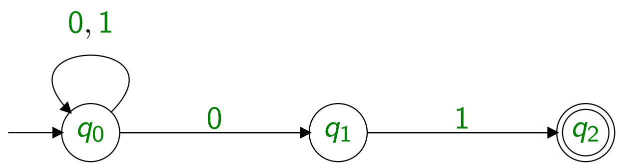
übrige Komponenten für $D$:

1. $Q_D$ ist die Menge aller Teilmengen von $Q_N$
2. zur Berechnung von $\delta_D$ betrachten wir jede Teilmenge $S \subseteq Q_N$ und jedes $a \in \Sigma$; wir setzen:
$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$
3. $F_D$ ist definiert als die Menge
$$\{S \subseteq Q_N \mid S \cap F_N \neq \varnothing\}$$





### Beispiel




### Teilmengenkonstruktion

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| $\to \{q_0\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0\}$ |
| $\{q_1\}$ | $\varnothing$ | $\{q_2\}$ |
| $* \{q_2\}$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_2\}$ |
| $* \{q_0, q_2\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0\}$ |
| $* \{q_1, q_2\}$ | $\varnothing$ | $\{q_2\}$ |
| $* \{q_0, q_1, q_2\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_2\}$ |

## Teilmengenkonstruktion (2)

wir benennen die Zustände im erhaltenen DEA um:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | $A$ | $\{q_0\}$ | $B$ | $\{q_1\}$ | $C$ | $\{q_2\}$ | $D$ |
| $\{q_0, q_1\}$ | $E$ | $\{q_0, q_2\}$ | $F$ | $\{q_1, q_2\}$ | $G$ | $\{q_0, q_1, q_2\}$ | $H$ |

| | 0 | 1 | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $A$ | $A$ | nicht erreichbar |
| $\rightarrow B$ | $E$ | $B$ | |
| $C$ | $A$ | $D$ | nicht erreichbar |
| $*D$ | $A$ | $A$ | nicht erreichbar |
| $E$ | $E$ | $F$ | |
| $*F$ | $E$ | $B$ | |
| $*G$ | $A$ | $D$ | nicht erreichbar |
| $*H$ | $E$ | $F$ | nicht erreichbar |





## Definition

definiere jene Teilmengen von $Q_N$, die erreichbar sind:

1. Basis: Sei $q_0$ der Startzustand von $N$; dann ist $\{q_0\}$ erreichbar
2. Schritt: Angenommen die Menge $S$ ist erreichbar; dann ist für jeden Eingabebuchstaben $a$, die Teilmenge $\delta_D(S, a)$ erreichbar

## Beispiel

| | 0 | 1 | erreichbar |
|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | |
| $\rightarrow \{q_0\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0\}$ | ✓ |
| $\{q_1\}$ | $\varnothing$ | $\{q_2\}$ | |
| $\{q_2\}$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | |
| $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_2\}$ | ✓ |
| $*\{q_0, q_2\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0\}$ | ✓ |
| $*\{q_1, q_2\}$ | $\varnothing$ | $\{q_2\}$ | |
| $*\{q_0, q_1, q_2\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_2\}$ | |