Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2011

Zusammenfassung der letzten LV

Definition

ein NEA besteht aus

1. einer endliche Menge Q, deren Elemente Zustände heißen
2. einer endliche Menge Σ, die Eingabealphabet heißt und deren Elemente Eingabezeichen genannt werden
3. einer Abbildung
$$\delta \colon Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$$
die Übergangsfunktion
4. einem ausgezeichneten Zustand q_0; der Startzustand
5. einer Teilmenge $F \subseteq Q$; die akzeptierenden Zustände

Erweiterte Übergangsfunktion

Definition

sei δ die Übergangsfunktion eines NEA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$; für N definiere die erweiterte Übergangsfunktion $\widehat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$:

1. Basis
$$\widehat{\delta}(p, \epsilon) := \{p\}$$
2. Schritt
$$\widehat{\delta}(p, xa) = \bigcup_{q \in \widehat{\delta}(p,x)} \delta(q, a)$$

Definition

die Sprache von NEA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

$$L(N) := \{x \mid \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing\}$$

Teilmengenkonstruktion

Definition

sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein NEA

konstruiere deterministischen Automaten $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$

Übrige Komponenten für D:

1. Q_D ist die Menge aller erreichbaren Teilmengen von Q_N
2. Zur Berechnung von δ_D betrachten wir jede erreichbare Teilmenge $S \subseteq Q_N$ und jedes $a \in \Sigma$; wir setzen:
$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$
3. F_D ist definiert als die Menge:
$$\{S \subseteq Q_N \mid S \cap F_N \neq \varnothing\}$$

Übersicht

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Korrektheit der Teilmengenkonstruktion

Satz

sei $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ der DEA, der mit der Teilmengenkonstruktion aus NEA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ konstruiert ist, dann gilt $\mathsf{L}(D) = \mathsf{L}(N)$

Beweis

- wir beweisen mit Induktion über $\ell(x)$, für $x \in \Sigma^*$ beliebig, dass

$$\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \widehat{\delta}_N(q_0, x)$$

- daraus folgt: Definition $\mathsf{L}(N), \mathsf{L}(D)$

$$\begin{aligned}\mathsf{L}(N) &= \{x \mid \widehat{\delta}_N(q_0, x) \cap F_N \neq \varnothing\} \\ &= \{x \mid \widehat{\delta}_D(\{q_0\}, x) \cap F_N \neq \varnothing\} \\ &= \{x \mid \widehat{\delta}_D(\{q_0\}, x) \in F_D\} = \mathsf{L}(D)\end{aligned}$$

Beweis (Fortsetzung)

wir zeigen $\forall x\colon\ \widehat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \widehat{\delta}_N(q_0, x)$: Definition $\widehat{\delta}_D, \widehat{\delta}_N$

1. Basis:

$$\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, \epsilon) = \{q_0\} = \widehat{\delta}_N(q_0, \epsilon)$$

2. Schritt:

sei $x = ya$ und angenommen $\widehat{\delta}_N(q_0, y) = \{p_1, \ldots, p_k\}$

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, ya) &= \delta_D(\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, y), a) \\ &= \delta_D(\widehat{\delta}_N(q_0, y), a) \\ &= \delta_D(\{p_1, \ldots, p_k\}, a) \\ &= \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a) = \widehat{\delta}_N(q_0, ya)\end{aligned}$$

■

Äquivalenz von NEA und DEA

Satz

Sprache L *wird genau dann von einem DEA akzeptiert, wenn* L *von einem NEA akzeptiert wird*

Beweis.

- Wenn:

  Dieser Teil des Satzes folgt aus der Teilmengenkonstruktion

- Nur-dann-wenn:

  wir schreiben den gegebenen DEA in einen NEA um

  sei $D = (Q, \Sigma, \delta_D, q_0, F)$

  definiere $N = (Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$:

$$\delta_D(p, a) = q \quad \Rightarrow \quad \delta_N(p, a) = \{q\}$$

■

Fangzustand

Beobachtung

- sei N ein NEA mit $|\delta_N(q,a)| \leqslant 1$ für alle $q \in Q$ und alle $a \in \Sigma$
- wir führen einen neuen Zustand f $(Q \cap \{f\} = \varnothing)$, den Fangzustandes ein
- und erweiteren die Übergangsfunktion

$$\delta'(q,a) := \begin{cases} \delta_N(q,a) & q \in Q \ \text{ und } \ |\delta_N(q,a)| = 1 \\ \{f\} & (q \in Q \ \text{ und } \ |\delta_N(q,a)| = 0) \ \text{ oder } \ q = f \end{cases}$$

- wir erhalten einen NEA N', der dieselbe Sprache wie N akzeptiert
- es is leicht einzusehen, dass der NEA N' äquivalent zu einem DEA ist

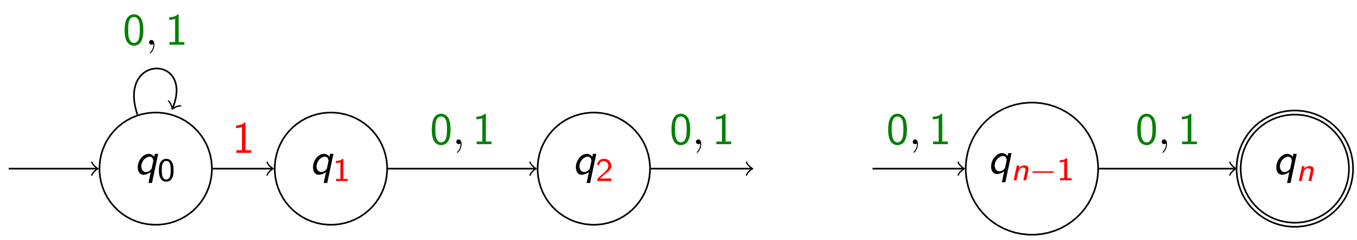
Konvention

in der Folge werden Automaten mit höchstens einem Folgezustand pro Eingabezeichen als deterministisch bezeichnet

Exponentieller Zuwachs

Beispiel

betrachte den folgenden NEA N:



1. der NEA N akzeptiert die Sprache $\{x1y \mid \ell(y) = n-1\}$
2. angenommen existiert DEA D, sodass $\mathrm{L}(D) = \mathrm{L}(N)$
3. D muss sich die n letzten Symbole merken, bevor er akzeptieren kann
4. dafür gibt es 2^n Möglichkeiten

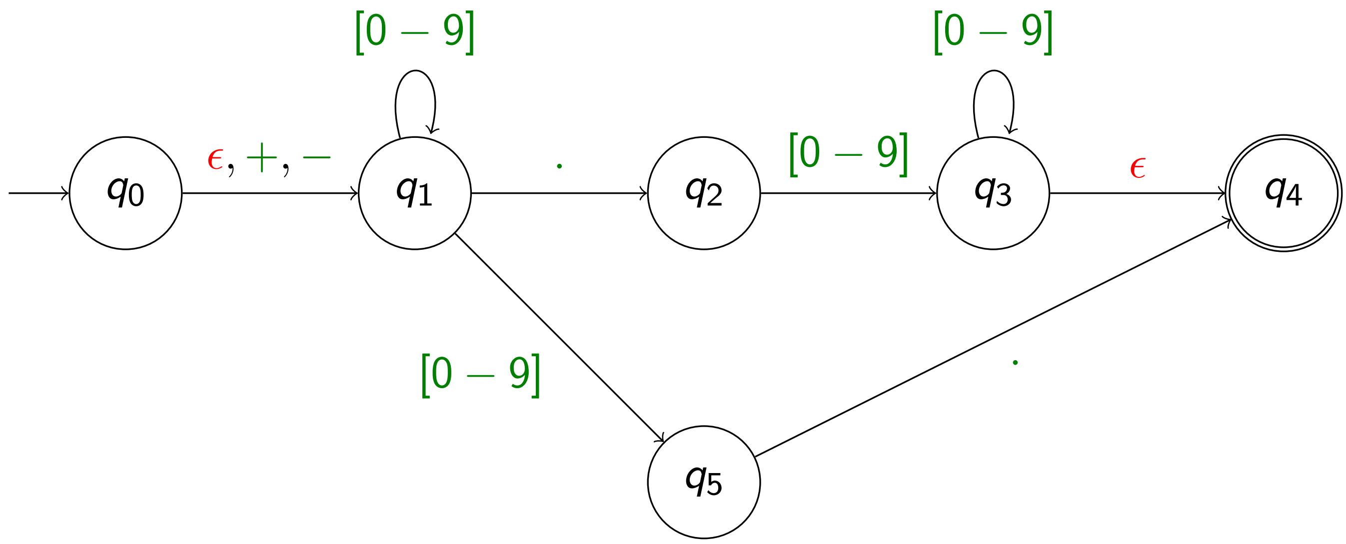
   D muss also zumindest 2^n Zustände haben

Frage

definiere einen endlichen Automaten der die Sprache L der Dezimalzahlen akzeptiert, etwa $-0.7 \in \mathrm{L}$ oder $3.14159265 \in \mathrm{L}$

Behauptung

der folgende Automat A akzeptiert genau die Sprache L



NEAs mit spontanen Übergängen

Definition

ein ϵ-NEA ist gegeben durch

1. eine endliche Menge Q, den Zuständen
2. eine endliche Menge Σ, dem Eingabealphabet
3. eine Abbildung
$$\delta\colon Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathcal{P}(Q)$$
die Übergangsfunktion
4. einen ausgezeichneten Zustand, der Startzustand
5. eine Teilmenge $F \subseteq Q$, die akzeptierenden Zustände

um Verwechslungen auszuschließen, fordern wir dass $\epsilon \notin \Sigma$

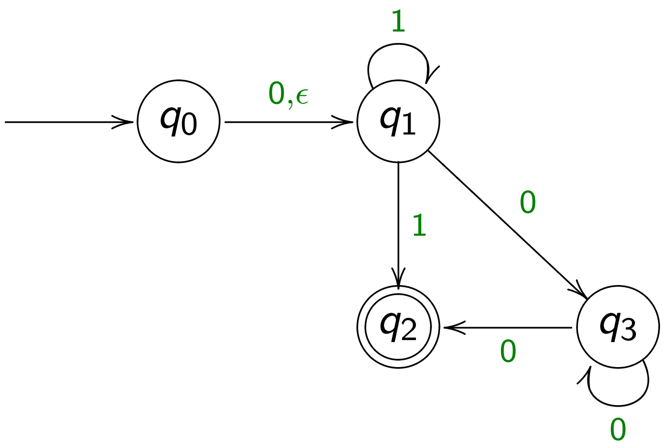
Beispiel

betrachte den ϵ-NEA E definiert wie folgt:

Zustandstafel

	0	1	ϵ
q_0	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\varnothing$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_3	$\{q_2, q_3\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

Zustandsgraph



Frage

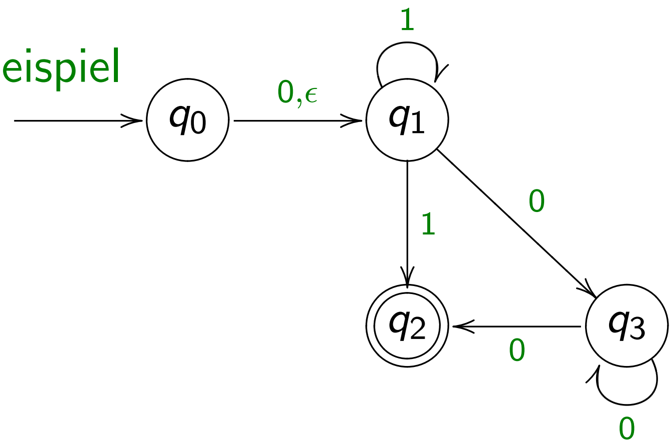
was ist die Sprache von E?

Definition

sei $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein ϵ-NEA; wir definieren die ϵ-Hülle eines Zustandes q induktiv:

1. Basis: $\{q\} \subseteq \epsilon\text{-Hülle}(q)$
2. Schritt: wenn $p \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$ und δ die Übergangsfunktion, dann
$$\delta(p, \epsilon) \subseteq \epsilon\text{-Hülle}(q)$$

Beispiel



1. Basis: $q_0 \in \epsilon\text{-Hülle}(q_0)$
2. Schritt: $q_1 \in \epsilon\text{-Hülle}(q_0)$

also $\epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0, q_1\}$

Alternative Definition

betrachte den Zustandsgraphen des Automaten, setze $S = \{q\}$

der folgende Algorithmus markiert alle Zustände in ϵ-Hülle(q):

1. markiere die Zustände in S
2. solange $S \neq \varnothing$, wiederhole:
   - wähle einen Zustand p aus S und entferne p
   - bestimme alle unmarkierten Nachfolger von p die mit einer ϵ-Kante erreichbar sind
   - markiere diese und füge sie zu S hinzu

Beispiel

betrache ϵ-NEA E:

$$\epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0, q_1\} \qquad \epsilon\text{-Hülle}(q_1) = \{q_1\}$$
$$\epsilon\text{-Hülle}(q_2) = \{q_2\} \qquad \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3\}$$

Definition

betrachte ϵ-NEA $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$; definiere die erweiterte Übergangsfunktion $\widehat{\delta}$: $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\})^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$:

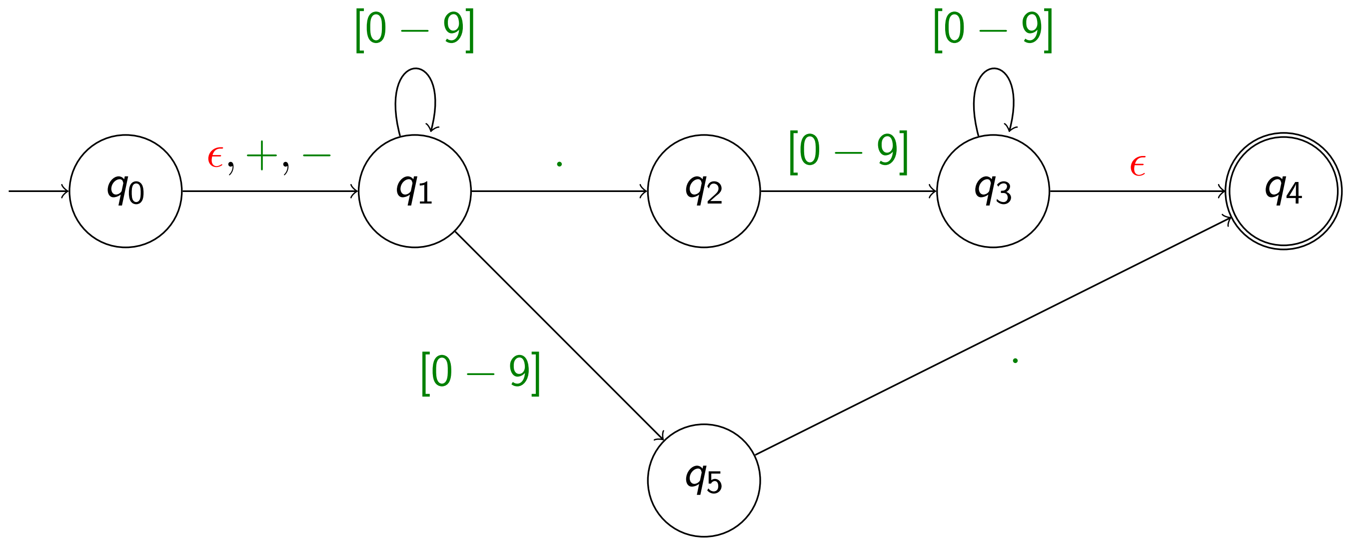
1. Basis: $\widehat{\delta}(q, \epsilon) := \epsilon\text{-Hülle}(q)$
2. Schritt: wir definieren $\widehat{\delta}(q, xa)$; angenommen $\widehat{\delta}(q, x) = \{p_1, \ldots, p_k\}$ und
$$\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, \ldots, r_m\}$$
   wir setzen:
$$\widehat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{j=1}^{m} \epsilon\text{-Hülle}(r_j)$$

die Sprache von ϵ-NEA $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

$$\mathrm{L}(E) := \{x \mid \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing\}$$

Beispiel

betrachte ϵ-NEA A:



Fakt

$\mathrm{L}(E) = L$, wobei L die gesuchte Sprache der Dezimalzahlen

Teilmengenkonstruktion für ϵ-NEAs

Definition

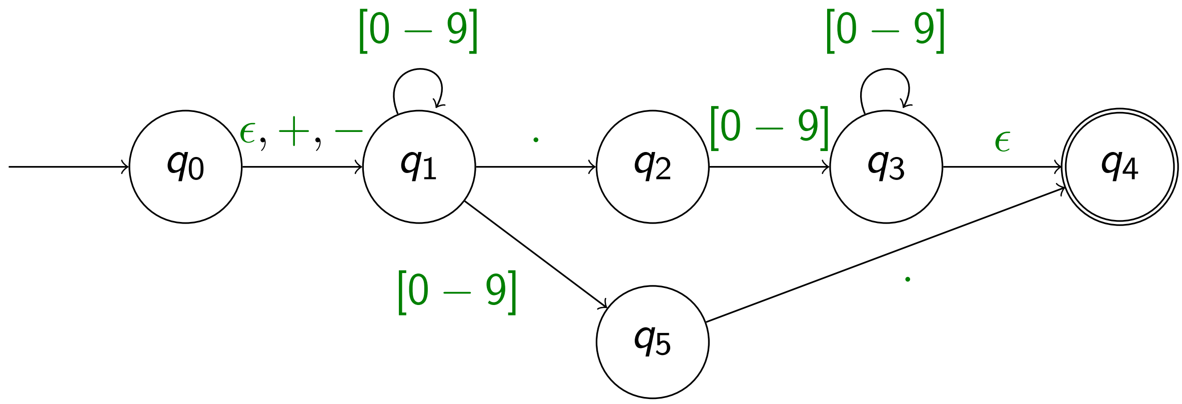
sei $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_E, F_E)$ ein ϵ-NEA, wir konstruieren DEA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$

1. Q_D ist die Menge der Teilmengen von Q_E.
2. Zur Berechnung von δ_D betrachten wir jede Teilmenge $S \subseteq Q_E$ und jedes $a \in \Sigma$:
   - angenommen $S = \{p_1, \dots, p_k\}$
   - berechne $\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a) := \{r_1, \dots, r_m\}$

   setze
   $$\delta_D(S, a) = \bigcup_{j=1}^{m} \epsilon\text{-Hülle}(r_j)$$
3. $q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_E)$
4. $F_D = \{S \subseteq Q_E \mid S \cap F_E \neq \varnothing\}$

Beispiel

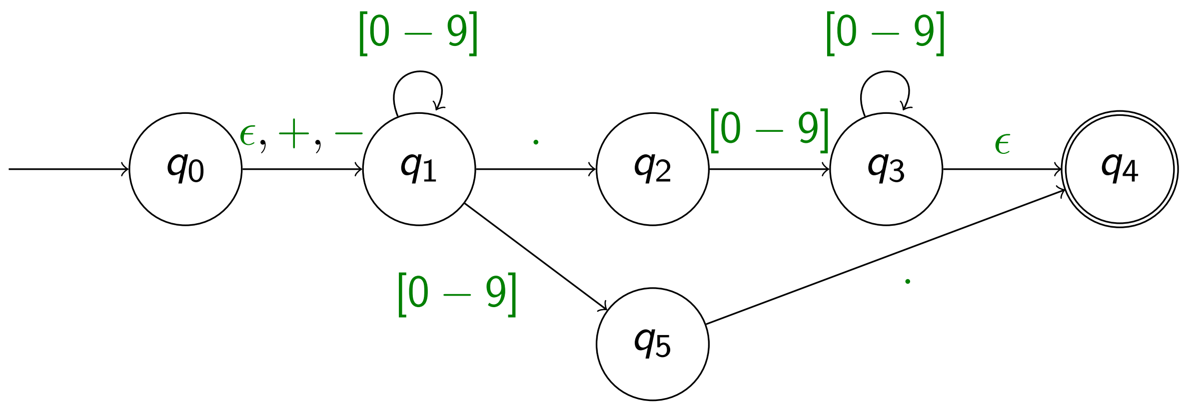
betrachte den Automaten A:



$$\epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0, q_1\} \quad \epsilon\text{-Hülle}(q_1) = \{q_1\} \quad \epsilon\text{-Hülle}(q_2) = \{q_2\}$$
$$\epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_4\} \quad \epsilon\text{-Hülle}(q_4) = \{q_4\} \quad \epsilon\text{-Hülle}(q_5) = \{q_5\}$$

$$\delta_D(\{q_3, q_4\}, 0) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_4\}$$

Beispiel (Fortsetzung)



	$+$	$-$	$\cdot$	$[0-9]$
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_5\}$
$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_5\}$
$\{q_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_3, q_4\}$
$\{q_1, q_5\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2, q_4\}$	$\{q_1, q_5\}$
$* \{q_3, q_4\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_3, q_4\}$
$* \{q_2, q_4\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_3, q_4\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$