

## Diskrete Mathematik

Arne Dür    Kurt Girstmair    Simon Legner  
 Georg Moser    Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik © UIBK  
 Sommersemester 2011



## Zusammenfassung der letzten LV

### Definition

ein NEA besteht aus

- 1 einer endliche Menge  $Q$ , deren Elemente Zustände heißen
- 2 einer endliche Menge  $\Sigma$ , die Eingabealphabet heißt und deren Elemente Eingabezeichen genannt werden
- 3 einer Abbildung

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

die **Übergangsfunktion**

- 4 einem ausgezeichneten Zustand  $q_0$ ; der Startzustand
- 5 einer Teilmenge  $F \subseteq Q$ ; die akzeptierenden Zustände

## Erweiterte Übergangsfunktion

### Definition

sei  $\delta$  die Übergangsfunktion eines NEA  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ; für  $N$  definiere die erweiterte Übergangsfunktion  $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ :

- 1 Basis

$$\hat{\delta}(p, \epsilon) := \{p\}$$

- 2 Schritt

$$\hat{\delta}(p, xa) = \bigcup_{q \in \hat{\delta}(p, x)} \delta(q, a)$$

### Definition

die **Sprache** von NEA  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ :

$$L(N) := \{x \mid \hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset\}$$

## Teilmengekombination

### Definition

sei  $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$  ein NEA

konstruiere deterministischen Automaten  $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$

Übrige Komponenten für  $D$ :

- 1  $Q_D$  ist die Menge aller **erreichbaren** Teilmengen von  $Q_N$
- 2 Zur Berechnung von  $\delta_D$  betrachten wir jede **erreichbare** Teilmenge  $S \subseteq Q_N$  und jedes  $a \in \Sigma$ ; wir setzen:

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$

- 3  $F_D$  ist definiert als die Menge:

$$\{S \subseteq Q_N \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$$

## Übersicht

### Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, **Teilmengenkonstruktion**,  $\epsilon$ -NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

### Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

### Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

## Korrektheit der Teilmengenkonstruktion

### Satz

sei  $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$  der DEA, der mit der Teilmengenkonstruktion aus NEA  $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$  konstruiert ist, dann gilt  $L(D) = L(N)$

### Beweis

- wir beweisen mit Induktion über  $\ell(x)$ , für  $x \in \Sigma^*$  beliebig, dass

$$\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \widehat{\delta}_N(q_0, x)$$

- daraus folgt:

Definition  $L(N), L(D)$

$$L(N) = \{x \mid \widehat{\delta}_N(q_0, x) \cap F_N \neq \emptyset\}$$

$$= \{x \mid \widehat{\delta}_D(\{q_0\}, x) \cap F_N \neq \emptyset\}$$

$$= \{x \mid \widehat{\delta}_D(\{q_0\}, x) \in F_D\} = L(D)$$

### Beweis (Fortsetzung)

wir zeigen  $\forall x: \widehat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \widehat{\delta}_N(q_0, x)$ :

Definition  $\widehat{\delta}_D, \widehat{\delta}_N$

#### 1 Basis:

$$\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, \epsilon) = \{q_0\} = \widehat{\delta}_N(q_0, \epsilon)$$

#### 2 Schritt:

sei  $x = ya$  und angenommen  $\widehat{\delta}_N(q_0, y) = \{p_1, \dots, p_k\}$

$$\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, ya) = \delta_D(\widehat{\delta}_D(\{q_0\}, y), a)$$

$$= \delta_D(\widehat{\delta}_N(q_0, y), a)$$

$$= \delta_D(\{p_1, \dots, p_k\}, a)$$

$$= \bigcup_{i=1}^k \delta_N(p_i, a) = \widehat{\delta}_N(q_0, ya)$$



## Äquivalenz von NEA und DEA

### Satz

Sprache  $L$  wird **genau dann** von einem DEA akzeptiert, **wenn**  $L$  von einem NEA akzeptiert wird

### Beweis.

- Wenn:**

Dieser Teil des Satzes folgt aus der **Teilmengenkonstruktion**

- Nur-dann-wenn:**

wir schreiben den gegebenen DEA in einen NEA um

sei  $D = (Q, \Sigma, \delta_D, q_0, F)$

definiere  $N = (Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$ :

$$\delta_D(p, a) = q \Rightarrow \delta_N(p, a) = \{q\}$$



## Fangzustand

### Beobachtung

- sei  $N$  ein NEA mit  $|\delta_N(q, a)| \leq 1$  für alle  $q \in Q$  und alle  $a \in \Sigma$
- wir führen einen neuen Zustand  $f$  ( $Q \cap \{f\} = \emptyset$ ), den **Fangzustand** ein
- und erweitern die Übergangsfunktion

$$\delta'(q, a) := \begin{cases} \delta_N(q, a) & q \in Q \text{ und } |\delta_N(q, a)| = 1 \\ \{f\} & (q \in Q \text{ und } |\delta_N(q, a)| = 0) \text{ oder } q = f \end{cases}$$

- wir erhalten einen NEA  $N'$ , der dieselbe Sprache wie  $N$  akzeptiert
- es ist leicht einzusehen, dass der NEA  $N'$  äquivalent zu einem DEA ist

### Konvention

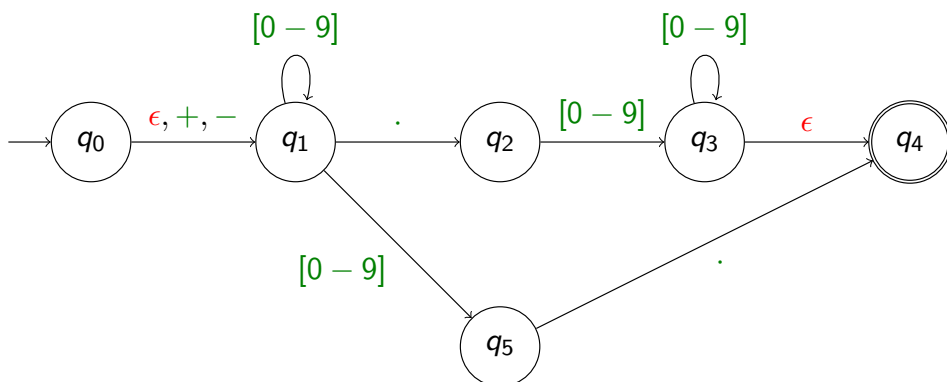
in der Folge werden Automaten mit höchstens einem Folgezustand pro Eingabezeichen als **deterministisch** bezeichnet

### Frage

definiere einen endlichen Automaten der die Sprache  $L$  der Dezimalzahlen akzeptiert, etwa  $-0.7 \in L$  oder  $3.14159265 \in L$

### Behauptung

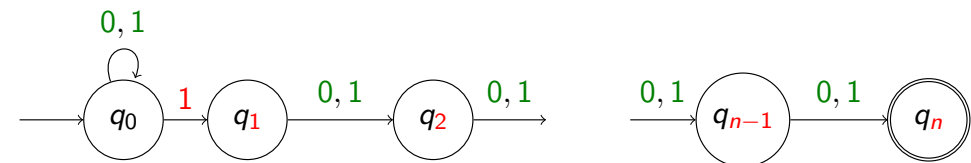
der folgende Automat  $A$  akzeptiert genau die Sprache  $L$



## Exponentieller Zuwachs

### Beispiel

betrachte den folgenden NEA  $N$ :



- 1 der NEA  $N$  akzeptiert die Sprache  $\{x1y \mid \ell(y) = n-1\}$
- 2 angenommen existiert DEA  $D$ , sodass  $L(D) = L(N)$
- 3  $D$  muss sich die  $n$  letzten Symbole merken, bevor er akzeptieren kann
- 4 dafür gibt es  $2^n$  Möglichkeiten  
 $D$  muss also zumindest  $2^n$  Zustände haben

## NEAs mit spontanen Übergängen

### Definition

ein  $\epsilon$ -NEA ist gegeben durch

- 1 eine endliche Menge  $Q$ , den Zuständen
- 2 eine endliche Menge  $\Sigma$ , dem Eingabealphabet
- 3 eine Abbildung

$$\delta: Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

die **Übergangsfunktion**

- 4 einen ausgezeichneten Zustand, den Startzustand
- 5 eine Teilmenge  $F \subseteq Q$ , die akzeptierenden Zustände

um Verwechslungen auszuschließen, fordern wir dass  $\epsilon \notin \Sigma$

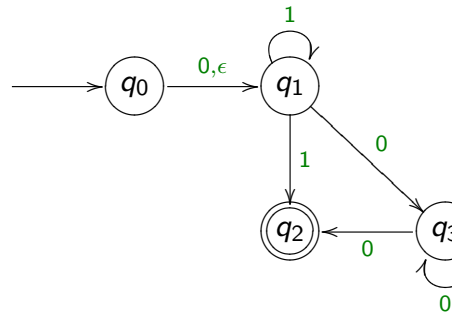
Beispiel

betrachte den  $\epsilon$ -NEA  $E$  definiert wie folgt:

Zustandstafel

	0	1	$\epsilon$
$q_0$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
$q_1$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\emptyset$
$q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$q_3$	$\{q_2, q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

Zustandsgraph



Frage

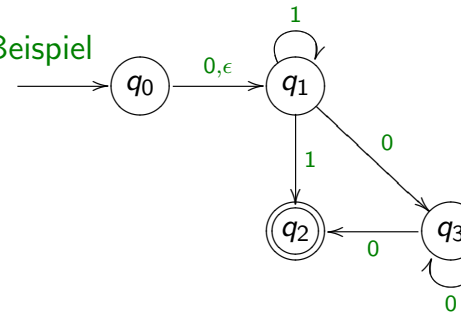
was ist die Sprache von  $E$ ?

Definition

sei  $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ein  $\epsilon$ -NEA; wir definieren die  $\epsilon$ -Hülle eines Zustandes  $q$  induktiv:

- 1 Basis:**  $\{q\} \subseteq \epsilon\text{-Hülle}(q)$
- 2 Schritt:** wenn  $p \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$  und  $\delta$  die Übergangsfunktion, dann  $\delta(p, \epsilon) \subseteq \epsilon\text{-Hülle}(q)$

Beispiel



- 1 Basis:**  $q_0 \in \epsilon\text{-Hülle}(q_0)$
  - 2 Schritt:**  $q_1 \in \epsilon\text{-Hülle}(q_0)$
- also  $\epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0, q_1\}$

Alternative Definition

betrachte den Zustandsgraphen des Automaten, setze  $S = \{q\}$  der folgende Algorithmus markiert alle Zustände in  $\epsilon\text{-Hülle}(q)$ :

- 1** markiere die Zustände in  $S$
- 2** solange  $S \neq \emptyset$ , wiederhole:
  - wähle einen Zustand  $p$  aus  $S$  und entferne  $p$
  - bestimme alle unmarkierten Nachfolger von  $p$  die mit einer  $\epsilon$ -Kante erreichbar sind
  - markiere diese und füge sie zu  $S$  hinzu

Beispiel

betrache  $\epsilon$ -NEA  $E$ :

$$\begin{aligned} \epsilon\text{-Hülle}(q_0) &= \{q_0, q_1\} & \epsilon\text{-Hülle}(q_1) &= \{q_1\} \\ \epsilon\text{-Hülle}(q_2) &= \{q_2\} & \epsilon\text{-Hülle}(q_3) &= \{q_3\} \end{aligned}$$

Definition

betrachte  $\epsilon$ -NEA  $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ; definiere die erweiterte Übergangsfunktion  $\hat{\delta}: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\})^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ :

- 1 Basis:**  $\hat{\delta}(q, \epsilon) := \epsilon\text{-Hülle}(q)$
- 2 Schritt:** wir definieren  $\hat{\delta}(q, xa)$ ; angenommen  $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, \dots, p_k\}$  und

$$\bigcup_{i=1}^k \delta(p_i, a) = \{r_1, \dots, r_m\}$$

wir setzen:

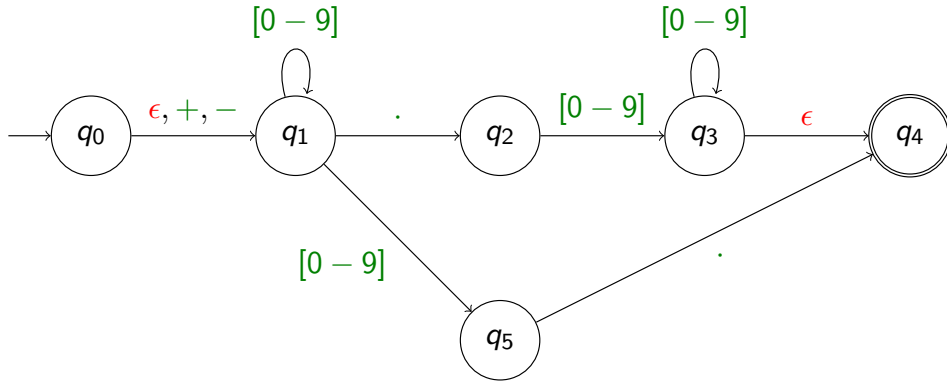
$$\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{j=1}^m \epsilon\text{-Hülle}(r_j)$$

die Sprache von  $\epsilon$ -NEA  $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ :

$$L(E) := \{x \mid \hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset\}$$

Beispiel

betrachte  $\epsilon$ -NEA  $A$ :



Fakt

$L(E) = L$ , wobei  $L$  die gesuchte Sprache der Dezimalzahlen

Teilmengenkonstruktion für  $\epsilon$ -NEAs

Definition

sei  $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_E, F_E)$  ein  $\epsilon$ -NEA, wir konstruieren DEA

$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$

1  $Q_D$  ist die Menge der Teilmengen von  $Q_E$ .

2 Zur Berechnung von  $\delta_D$  betrachten wir jede Teilmenge  $S \subseteq Q_E$  und jedes  $a \in \Sigma$ :

- angenommen  $S = \{p_1, \dots, p_k\}$
- berechne  $\bigcup_{i=1}^k \delta_E(p_i, a) := \{r_1, \dots, r_m\}$

setze

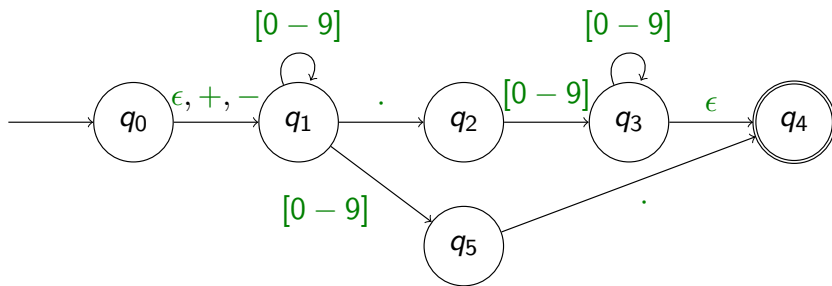
$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{j=1}^m \epsilon\text{-H\u00fclle}(r_j)$$

3  $q_D = \epsilon\text{-H\u00fclle}(q_E)$

4  $F_D = \{S \subseteq Q_E \mid S \cap F_E \neq \emptyset\}$

Beispiel

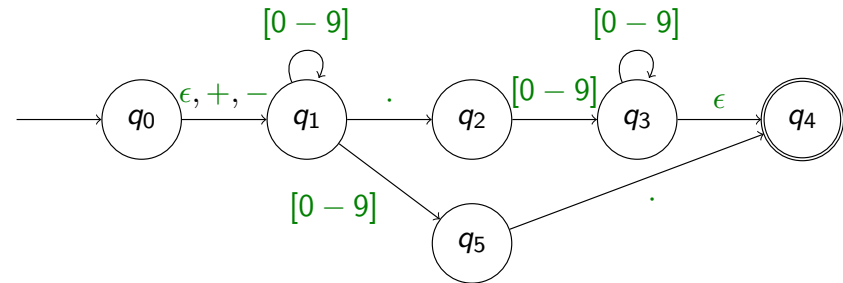
betrachte den Automaten  $A$ :



$\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0) = \{q_0, q_1\}$      $\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_1) = \{q_1\}$      $\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_2) = \{q_2\}$   
 $\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_3) = \{q_3, q_4\}$      $\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_4) = \{q_4\}$      $\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_5) = \{q_5\}$

$\delta_D(\{q_3, q_4\}, 0) = \epsilon\text{-H\u00fclle}(q_3) = \{q_3, q_4\}$

Beispiel (Fortsetzung)



	+	-	.	[0-9]
$\rightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_5\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_5\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_4\}$
$\{q_1, q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_4\}$	$\{q_1, q_5\}$
$* \{q_3, q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_4\}$
$* \{q_2, q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3, q_4\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$