Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2011

Zusammenfassung der letzten LV

Definition

sei Σ ein endliches Alphabet. Wir definieren reguläre Ausdrücke induktiv

Basis

1. $\varnothing$ ist ein regulärer Ausdruck (kurz: RA) $\qquad \mathsf{L}(\varnothing) := \varnothing$
2. ϵ ist ein RA $\qquad \mathsf{L}(\epsilon) := \{\epsilon\}$
3. für jedes Symbol a ist $\mathbf{a}$ ein RA $\qquad \mathsf{L}(\mathbf{a}) := \{a\}$

Schritt

1. für jeden RA E ist E^* ein RA $\qquad \mathsf{L}(E^*) := \mathsf{L}(E)^*$
2. für RAs E und F ist EF ein RA $\qquad \mathsf{L}(EF) := \mathsf{L}(E) \cdot \mathsf{L}(F)$
3. für RAs E und F ist $E + F$ ein RA $\qquad \mathsf{L}(E + F) := \mathsf{L}(E) \cup \mathsf{L}(F)$
4. wenn E ein RA ist, dann ist (E) ein RA $\qquad \mathsf{L}((E)) := \mathsf{L}(E)$

Ein Algorithmus für Algebraische Gesetze

seien G, H beliebige reguläre Ausdrücke

Algorithmus

1. für alle Variablen in G und H: durch konkrete Symbole ersetzen (verschiedene Variablen durch verschiedene Symbole ersetzen)
2. Gleichung $\mathrm{L}(G) = \mathrm{L}(H)$ in eine Gleichung $\mathrm{L}(C) = \mathrm{L}(D)$ umwandeln
3. teste $\mathrm{L}(C) = \mathrm{L}(D)$
   - wenn ja, dann gilt $\mathrm{L}(G) = \mathrm{L}(H)$
   - wenn nein, dann gilt $\mathrm{L}(G) \neq \mathrm{L}(H)$

Lemma

der angegebene Test ist korrekt:
für jedes so gefundene Gesetz gilt $\mathrm{L}(G) = \mathrm{L}(H)$ für alle beliebigen regulären Ausdrücke an der Stelle von G bzw. H

Exkurs: Kleene Algebren

Definition

1. betrachte den idempotenten Halbring $(A, +, \cdot, 0, 1)$
2. sei auf A eine partielle Ordnung $a \leqslant b$ definiert:

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a + x = b \text{ für } x \in A$$

3. definiere auf A die Operation *:

$$1 + aa^* \leqslant a^* \qquad b + ax \leqslant x \Rightarrow a^*b \leqslant x$$
$$1 + a^*a \leqslant a^* \qquad b + xa \leqslant x \Rightarrow ba^* \leqslant x$$

dann heißt die Struktur $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, ^*, 0, 1)$ Kleene Algebra

Beispiel

- RAs formen die Kleene Algebra $(\Sigma^*, +, \cdot, ^*, \varnothing, \epsilon)$
- as heißt, wenn zwei RAs E, F die gleiche Sprache beschreiben, dann gilt in der entsprechenden Kleene Algebra die Gleichung $E = F$

Übersicht

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Reguläre Ausdrücke und Endliche Automaten

Satz

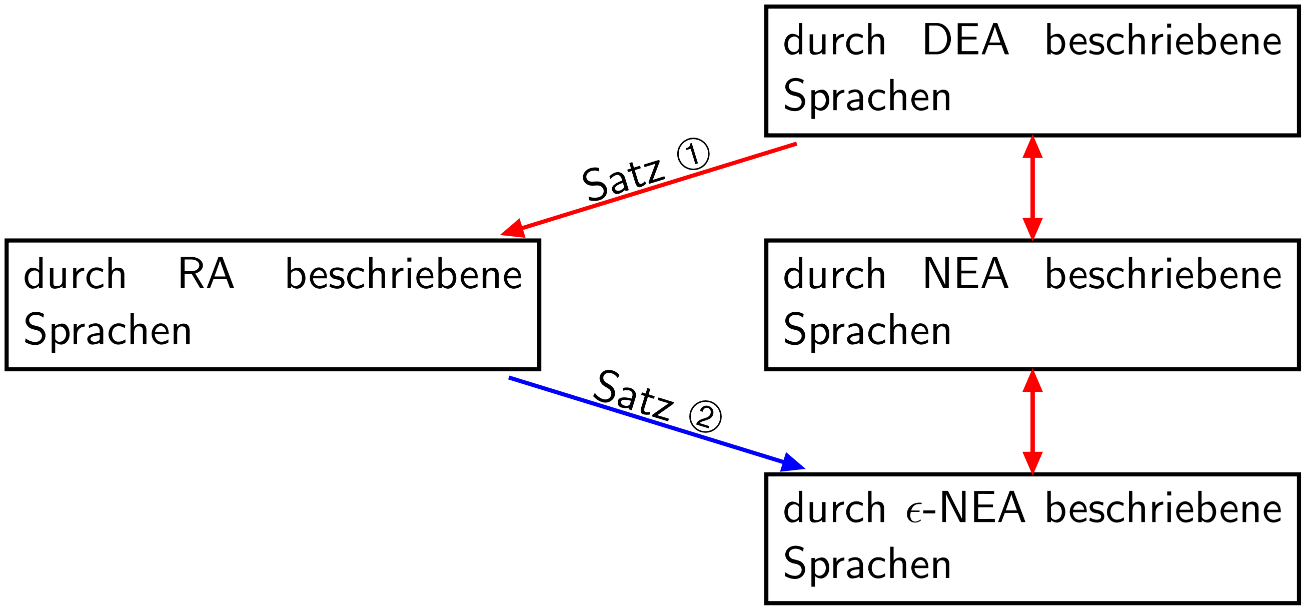
die folgenden Mengen sind gleich:

- *die Menge der durch RA beschriebenen Sprachen*
- *die Menge der von DEA akzeptierten Sprachen*
- *die Menge der von NEA akzeptierten Sprachen*
- *die Menge der von ϵ-NEA akzeptierten Sprachen*

Definition

diese Sprachen nennt man reguläre Sprachen

Reguläre Sprachen



EAs in reguläre Ausdrücke transformieren

Satz ①

sei A ein beliebiger DEA, dann
$\exists$ regulären Ausdruck R, sodass $\mathrm{L}(A) = \mathrm{L}(R)$

Beweisansatz.

- Zustände von A in natürliche Zahlen umbenennen
- sei n die Anzahl der Zustände
- definiere regulären Ausdrücke:

$$R_{ij}^{(k)}$$

für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n$

Sprache von $R_{ij}^{(k)}$ sind die Wörter, die A von Zustand i bis Zustand j lesen kann wobei nur Zustände $\leqslant k$ besucht werden

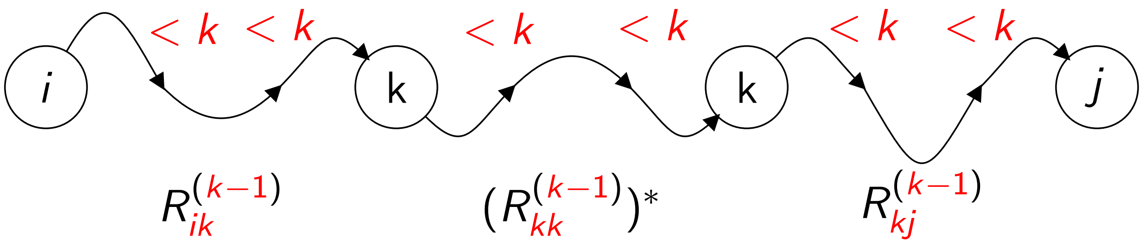
Beweisansatz (Fortsetzung).

- angenommen $R_{ij}^{(k)}$ ist schon definiert, für alle k
- angenommen der Startknoten des DEA A ist 1
- definiere RA R, sodass $\mathrm{L}(A) = \mathrm{L}(R)$:

$$R = R_{1m_1}^{(n)} + \cdots + R_{1m_\ell}^{(n)}$$

wobei $m_1, \ldots, m_\ell$ alle akzeptierenden Zustände in A

Beobachtung



Menge der gelesenen Zeichen $= R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$

definiere $R_{ij}^{(k)}$ induktiv

Basis $k = 0$

1. betrachte die Wege der Länge $\leqslant 1$
2. unterscheide die Fälle $i{\neq}j$ und $i{=}j$

Fall $i{\neq}j$

betrachte die Kanten zwischen i und j

- wenn es keine solche Kante

  setze $R_{ij}^{(0)} = \varnothing$
- wenn es genau eine solche Kante (i, a, j) gibt

  setze $R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a}$
- wenn es mehrere Kanten $(i, a_1, j), \ldots, (i, a_l, j)$ gibt

  setze $R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a_1} + \cdots + \mathbf{a_l}$

Fall $i{=}j$

- zusätzlich repräsentiere die Wege der Länge 0 durch das Leerwort ϵ

Schritt $k > 0$

1. angenommen $\exists$ Weg von i nach j, der nur durch Zustände $\leqslant k$ führt
2. zwei Fälle: ① k liegt auf dem Weg oder nicht ②

Fall ① k liegt auf dem Weg

- spalte den Pfad in Teilstücke, die k nicht passieren
- das Anfangsstück führt von i nach k
- die Mittelstücke führen von k nach k
- das Endstück von k nach j

Fall ② k liegt nicht auf dem Pfad

- verwende $R_{ij}^{(k-1)}$

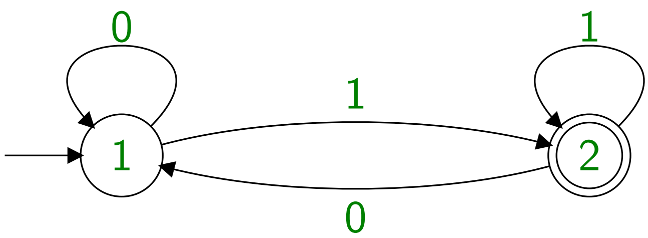
in Summe erhalten wir:

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

■

Beispiel

gegeben der folgende DEA A



mit Hilfe des Verfahrens folgt $R = (\mathbf{0}^*\mathbf{1})(\mathbf{0}^*\mathbf{1})^* = \mathrm{L}(A)$:

$$\begin{aligned}
R_{12}^{(2)} &= R_{12}^{(1)} + R_{12}^{(1)}(R_{22}^{(1)})^* R_{22}^{(1)} \\
R_{12}^{(1)} &= R_{12}^{(0)} + R_{11}^{(0)}(R_{11}^{(0)})^* R_{12}^{(0)} \\
&= \mathbf{1} + (\mathbf{0} + \epsilon)(\mathbf{0} + \epsilon)^*\mathbf{1} = \mathbf{0}^*\mathbf{1} \\
R_{22}^{(1)} &= R_{22}^{(0)} + R_{21}^{(0)}(R_{11}^{(0)})^* R_{12}^{(0)} \\
&= (\mathbf{1} + \epsilon) + \mathbf{0}(\mathbf{0} + \epsilon)^*\mathbf{1} = \mathbf{0}^*\mathbf{1} + \epsilon
\end{aligned}$$

Reguläre Ausdrücke in Endliche Automaten verwandeln

Satz ②

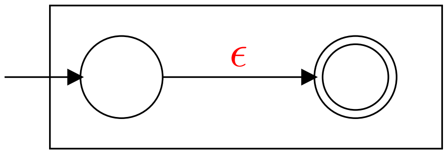
sei R ein beliebiger RA, dann $\exists$ ϵ-NEA E, sodass $\mathrm{L}(R) = \mathrm{L}(E)$

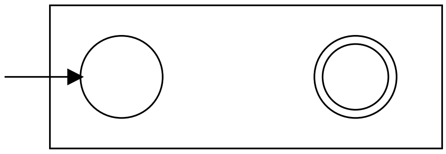
Beweisansatz.

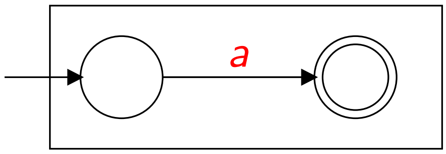
- angenommen $\mathrm{L} = \mathrm{L}(R)$, für einen RA R
- wir zeigen $\exists$ ϵ-NEA E mit
  1. genau einem akzeptierenden Zustand
  2. keinen Kanten zum Startzustand
  3. keinen Kanten vom akzeptierenden Zustand
- $\mathrm{L} = \mathrm{L}(E)$
- wir verwenden Induktion über reguläre Ausdrücke

Basis

für die RA ϵ, $\varnothing$ und **a** betrachten wir die folgenden 3 Automaten.

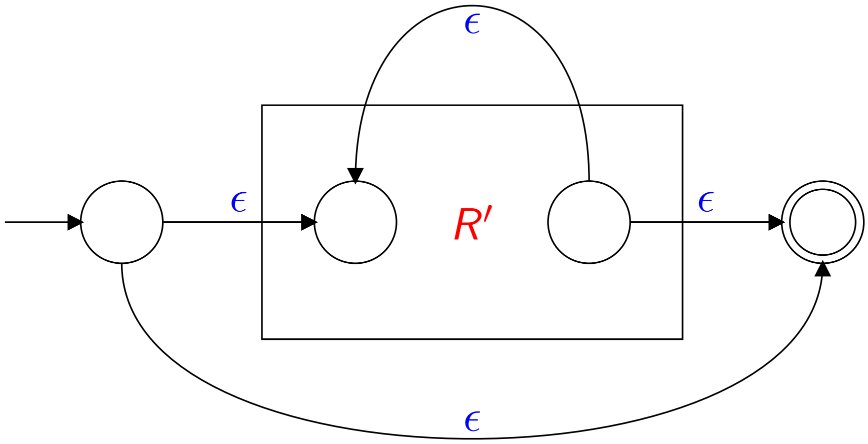






Induktionsschritt wir betrachten nur den Fall: $R \equiv (R')^*$

- nach Induktionshypothese existiert ein Automat für R'
- wir transformieren:



∎