Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2011

Zusammenfassung der letzten LV

Satz

die folgenden Mengen sind gleich:

- *die Menge der durch RA beschriebenen Sprachen*
- *die Menge der von DEA akzeptierten Sprachen*
- *die Menge der von NEA akzeptierten Sprachen*
- *die Menge der von ϵ-NEA akzeptierten Sprachen*

Satz ①

sei A ein beliebiger DEA, dann
$\exists$ regulären Ausdruck R, sodass $\mathsf{L}(A) = \mathsf{L}(R)$

Satz ②

sei R ein beliebiger RA, dann $\exists$ ϵ-NEA E, sodass $\mathsf{L}(R) = \mathsf{L}(E)$

Definition

definiere $R_{ij}^{(k)}$ induktiv

Basis $k = 0$

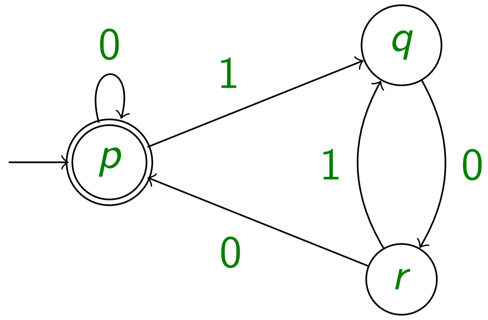
1. Fall $i \neq j$: Kanten zwischen i und j
   - keine solche Kante:
     $$R_{ij}^{(0)} = \varnothing$$
   - eine oder mehrere Kanten $(i, a_1, j), \ldots, (i, a_\ell, j)$:
     $$R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a_1} + \cdots + \mathbf{a}_\ell$$
2. Fall $i = j$
   - zusätzlich repräsentiere die Wege der Länge 0 durch das Leerwort ϵ

Schritt $k > 0$

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)} (R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

Beispiel

betrachte den DEA A:



Frage

wie lautet der RA R, sodass $\mathrm{L}(A) = \mathrm{L}(R)$?

Antwort

setze

$$R = \mathbf{0}^* + \mathbf{0}^*\mathbf{1}(\epsilon + \mathbf{0}\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*\mathbf{0}\mathbf{0}\mathbf{0}^*$$

Begründung: an der Tafel

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Abgeschlossenheit regulärer Sprachen

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen

1. *unter Vereinigung*
2. *unter Schnitt*
3. *unter Komplement*
4. *unter Mengendifferenz*
5. *unter Abschluss (unter Kleene-Stern)*
6. ...

Vereinigung

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung

Beweis.

- seien A, B reguläre Sprachen
- und seien E, F RAs sodass $A = \mathrm{L}(E)$, $B = \mathrm{L}(F)$

$$A \cup B = \mathrm{L}(E + F)$$

■

Beispiel

$A = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ endet in } 01\}$ $B = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ endet mit } 10\}$
$E = (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{01}$ $F = (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{10}$

$$A \cup B = \mathrm{L}((\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{01} + (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{10}) = \mathrm{L}(((\mathbf{0} + \mathbf{1})^*(\mathbf{01} + \mathbf{10}))$$

Komplement

Definition

sei L eine formale Sprache über dem Alphabet Σ
das Komplement $\sim L$ von L ist $\Sigma^* \setminus L$

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Komplement

Beweis.

- sei L regulär
- $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, sodass $L = \mathrm{L}(A)$

$$\sim L = \mathrm{L}(B) \qquad B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$$

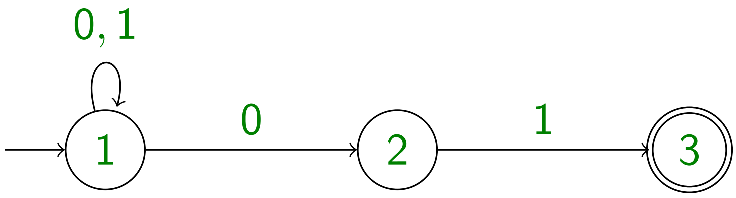
■

Beispiel: Abgeschlossenheit unter Komplement

$$L = \mathrm{L}((\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01}) \qquad \sim L = ???$$

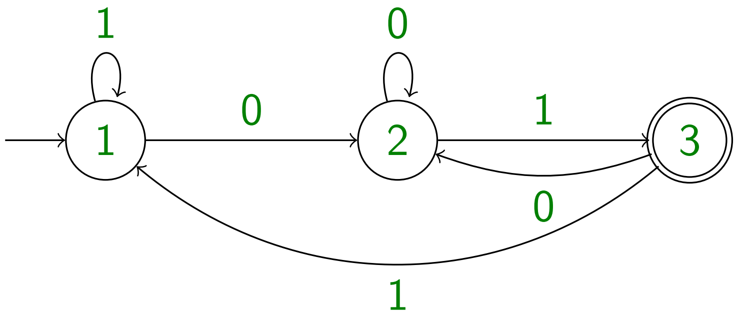
RA $\longrightarrow$ NEA

$(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01}$



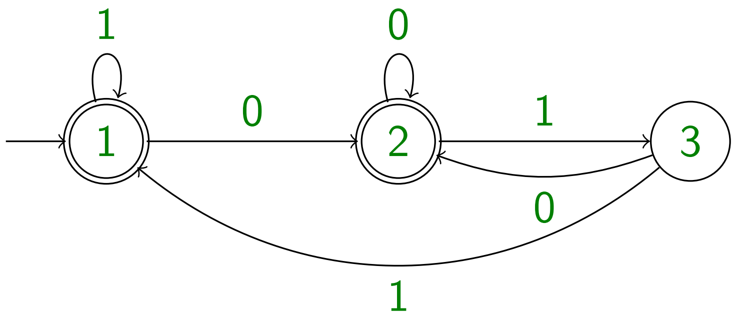
NEA $\longrightarrow$ DEA

$(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01}$



Komplement des DEA

$\{0,1\}^* \setminus \mathrm{L}((\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01})$



DEA $\longrightarrow$ RA

berechne

$$\begin{aligned} R_{11}^{(3)} &= \mathbf{1}^* + (\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+\mathbf{1})^+\mathbf{1}^+ \quad \text{und} \\ R_{12}^{(3)} &= (\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+\mathbf{1})^*\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+ \end{aligned}$$

somit gilt

$$\sim L = \mathrm{L}(\mathbf{1}^* + (\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+\mathbf{1})^+\mathbf{1}^+ + (\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+\mathbf{1})^*\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+)$$

Durchschnitt

Satz

reguläre Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen

Beweis.

seien L, M reguläre Sprachen

- dann gilt $L \cup M$ ist regulär
- $\sim L$ ist regulär

wir wenden das Gesetz von de Morgan an:

$$L \cap M = \sim(\sim L \cup \sim M)$$

■

Durchschnitt (2)

Satz

reguläre Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen

Direkter Beweis.

- seien L, M reguläre Sprachen
- $\exists$ DEA $A_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_L, F_L)$ sodass $L = \mathrm{L}(A_L)$
- $\exists$ DEA $A_M = (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_M, F_M)$ sodass $M = \mathrm{L}(A_M)$

wir konstruieren den Produktautomaten $A = A_L \times A_M$:

$$A = (Q_L \times Q_M, \Sigma, \delta, (q_L, q_M), F_L \times F_M)$$

$$\text{mit} \quad \delta((p,q),a) = (\delta_L(p,a), \delta_M(q,a))$$

wir sehen: $\mathrm{L}(A) = \mathrm{L}(A_L) \cap \mathrm{L}(A_M)$

Mengendifferenz

Satz

reguläre Sprachen sind unter Differenz abgeschlossen

Beweis.

- seien L, M reguläre Sprachen
- $\sim L$ ist regulär
- dann gilt $L \cap M$ ist regulär

$$L \setminus M = L \cap \sim M$$

■

Erinnerung: Ausdrucksstärke regulärer Sprachen

Beispiel

betrachte Sprache L, die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

Beispiel

```
<expression> ::= <condition>
  | if <condition> then <expression> fi
  | <expression> <expression>
```

Frage

Durch regulären Ausdrücke beschreibbar?

Antwort

Nein

Wie zeigen wir, dass eine Sprache nicht regulär ist ?

Beispiel

betrachte die folgende nicht-reguläre Sprache L:

$$L = \{(^m)^m | m \geqslant 0\} = \{\epsilon, (), (()), ((())), (((()))), \dots\}$$

- angenommen L wäre regulär: $\exists$ DEA A, $\mathrm{L}(A) = L$
- sei $n = |Q|$ und $m \geqslant n$
- betrache $(^m)^m \in L$:

$$\underbrace{(((((((((((((((((}_{x}\underbrace{((((((((}_{y}\underbrace{(((((((()))))))))))))))))))))))))))))))))}_{z}$$

$$\underset{q_0}{\uparrow}\qquad\qquad \underset{p}{\uparrow}\qquad \underset{p}{\uparrow}\qquad\qquad\qquad \underset{r}{\uparrow}$$

- Teilstring $y \neq \epsilon$, y kann weggelassen oder vervielfacht werden

Pumpinglemma (Schleifenlemma)

zunächst zeigen wir einen Abschlusseigenschaft von regulären Sprachen

Satz

1. *sei L eine reguläre Sprache*
2. *dann $\exists$ eine Konstante n*

   und $\forall$ Wörter $w \in L$, mit $\ell(w) \geqslant n$ gilt

   $\exists$ Wörter x, y, z mit

$$w = xyz$$

wobei

- $y \neq \epsilon$,
- $\ell(xy) \leqslant n$

sodass $\forall$ $k \geqslant 0$

$$x(y)^k z \in L$$

Beweis (1).

angenommen L ist regulär
dann $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit n Zuständen, sodass $L = \mathrm{L}(A)$

- obdA L unendlich, sonst ist der Satz trivial
- sei

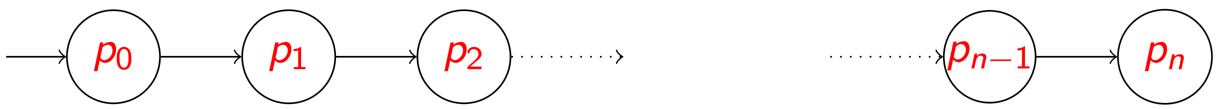
$$w = a_1 \cdots a_m \qquad\qquad m \geqslant n$$

- definiere

$$p_i = \widehat{\delta}(q_0, a_1 \cdots a_i)$$

p_i ist der Zustand von A nach dem Lesen von i Symbolen von w;
beachte $p_0 = q_0$

- betrachte den Weg



- die p_i können nicht alle verschieden sein: es gibt nur n Zustände

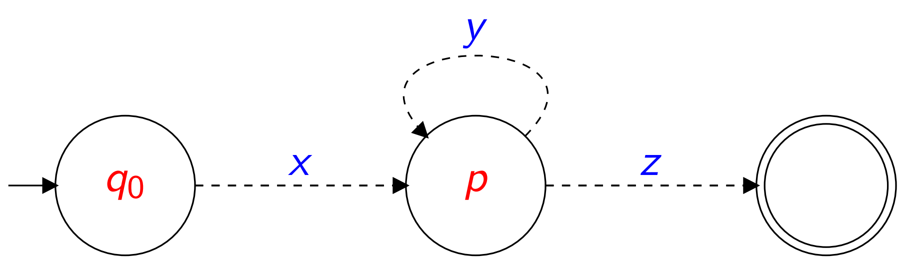
Beweis (2).

- $\exists$ Indices i, j, sodass

$$p_i = p_j =: p \qquad\qquad i < j$$

- zerlege w:

$$\underbrace{a_1 \cdots a_i}_{x} \qquad \underbrace{a_{i+1} \cdots a_j}_{y \neq \epsilon} \qquad \underbrace{a_{j+1} \cdots a_m}_{z}$$



- für all k wird

$$x(y)^k z$$

akzeptiert: A durchläuft den Weg von p nach p k-mal ■

Kontraposition des Pumpinglemma

um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist, verwendet man die Kontraposition des Pumpinglemmas

Satz

angenommen

1. $\forall\ n$
2. $\exists$ *ein String* $w \in L$ *mit* $\ell(w) \geqslant n$ *und*
3. $\forall$ *Zerlegung von* w *in* x, y *und* z *mit* $w = xyz$
   - $y \neq \epsilon$,
   - $\ell(xy) \leqslant n$,
4. $\exists\ k$ *mit* $x(y)^k z \notin L$

dann ist L *nicht regulär*