

Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik © UIBK
Sommersemester 2011



Zusammenfassung der letzten LV

Satz

die folgenden Mengen sind gleich:

- die Menge der durch RA beschriebenen Sprachen
- die Menge der von DEA akzeptierten Sprachen
- die Menge der von NEA akzeptierten Sprachen
- die Menge der von ϵ -NEA akzeptierten Sprachen

Satz ①

sei A ein beliebiger DEA, dann

\exists regulären Ausdruck R , sodass $L(A) = L(R)$

Satz ②

sei R ein beliebiger RA, dann $\exists \epsilon$ -NEA E , sodass $L(R) = L(E)$

Definition

definiere $R_{ij}^{(k)}$ induktiv

Basis $k = 0$

1 Fall $i \neq j$: Kanten zwischen i und j

- keine solche Kante:

$$R_{ij}^{(0)} = \emptyset$$

- eine oder mehrere Kanten $(i, a_1, j), \dots, (i, a_\ell, j)$:

$$R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a_1} + \dots + \mathbf{a_\ell}$$

2 Fall $i = j$

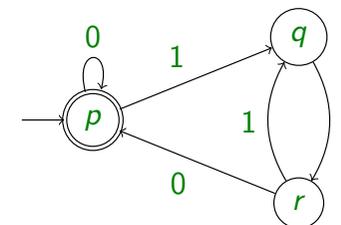
- zusätzlich repräsentiere die Wege der Länge 0 durch das Leerwort ϵ

Schritt $k > 0$

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^*R_{kj}^{(k-1)}$$

Beispiel

betrachte den DEA A :



Frage

wie lautet der RA R , sodass $L(A) = L(R)$?

Antwort

setze

$$R = \mathbf{0^*} + \mathbf{0^*1(\epsilon + 00^*1)^*000^*}$$

Begründung: an der Tafel

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ -NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, **Pumpinglemma**, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Abgeschlossenheit regulärer Sprachen

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen

- 1 unter Vereinigung
- 2 unter Schnitt
- 3 unter Komplement
- 4 unter Mengendifferenz
- 5 unter Abschluss (unter Kleene-Stern)
- 6 ...

Vereinigung

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung

Beweis.

- seien A, B reguläre Sprachen
- und seien E, F RAs sodass $A = L(E)$, $B = L(F)$

$$A \cup B = L(E + F)$$



Beispiel

$$A = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ endet in } 01\} \quad B = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ endet mit } 10\}$$

$$E = (0 + 1)^* 01 \quad F = (0 + 1)^* 10$$

$$A \cup B = L((0 + 1)^* 01 + (0 + 1)^* 10) = L(((0 + 1)^* (01 + 10)))$$

Komplement

Definition

sei L eine formale Sprache über dem Alphabet Σ
das **Komplement** $\sim L$ von L ist $\Sigma^* \setminus L$

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Komplement

Beweis.

- sei L regulär
- \exists DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, sodass $L = L(A)$

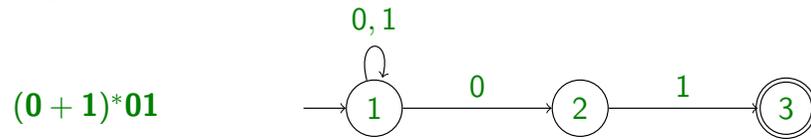
$$\sim L = L(B) \quad B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$$



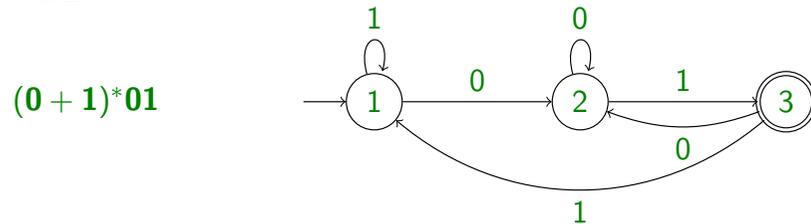
Beispiel: Abgeschlossenheit unter Komplement

$$L = L((0 + 1)^*01) \quad \sim L = ???$$

RA → NEA

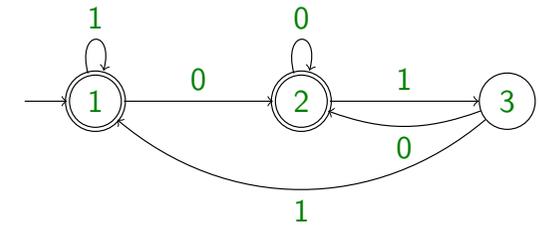


NEA → DEA



Komplement des DEA

$$\{0, 1\}^* \setminus L((0 + 1)^*01)$$



DEA → RA

berechne

$$R_{11}^{(3)} = 1^* + (1^*0+1)^+1^+ \quad \text{und}$$

$$R_{12}^{(3)} = (1^*0+1)^*1^*0^+$$

somit gilt

$$\sim L = L(1^* + (1^*0+1)^+1^+ + (1^*0+1)^*1^*0^+)$$

Durchschnitt

Satz

reguläre Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen

Beweis.

seien L, M reguläre Sprachen

- dann gilt $L \cup M$ ist regulär
- $\sim L$ ist regulär

wir wenden das Gesetz von **de Morgan** an:

$$L \cap M = \sim(\sim L \cup \sim M)$$



Durchschnitt (2)

Satz

reguläre Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen

Direkter Beweis.

- seien L, M reguläre Sprachen
- \exists DEA $A_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_L, F_L)$ sodass $L = L(A_L)$
- \exists DEA $A_M = (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_M, F_M)$ sodass $M = L(A_M)$

wir konstruieren den **Produktautomaten** $A = A_L \times A_M$:

$$A = (Q_L \times Q_M, \Sigma, \delta, (q_L, q_M), F_L \times F_M)$$

$$\text{mit } \delta((p, q), a) = (\delta_L(p, a), \delta_M(q, a))$$

wir sehen: $L(A) = L(A_L) \cap L(A_M)$

Mengendifferenz

Satz

reguläre Sprachen sind unter Differenz abgeschlossen

Beweis.

- seien L, M reguläre Sprachen
- $\sim L$ ist regulär
- dann gilt $L \setminus M$ ist regulär

$$L \setminus M = L \cap \sim M$$



Erinnerung: Ausdruckstärke regulärer Sprachen

Beispiel

betrachte Sprache L , die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

Beispiel

```
<expression> ::= <condition>
| if <condition> then <expression> fi
| <expression> <expression>
```

Frage

Durch regulären Ausdrücke beschreibbar?

Antwort

Nein

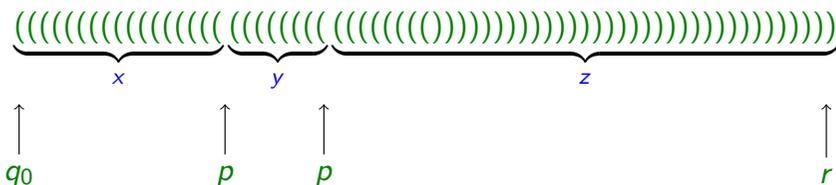
Wie zeigen wir, dass eine Sprache nicht regulär ist ?

Beispiel

betrachte die folgende nicht-reguläre Sprache L :

$$L = \{ ({}^m)^m \mid m \geq 0 \} = \{ \epsilon, (), (()), ((())), (((())), \dots \}$$

- angenommen L wäre regulär: \exists DEA $A, L(A) = L$
- sei $n = |Q|$ und $m \geq n$
- betrachte $({}^m)^m \in L$:



- Teilstring $y \neq \epsilon$, y kann weggelassen oder vervielfacht werden

Pumpinglemma (Schleifenlemma)

zunächst zeigen wir einen Abschlusseigenschaft von regulären Sprachen

Satz

- 1 sei L eine reguläre Sprache
- 2 dann \exists eine Konstante n und \forall Wörter $w \in L$, mit $\ell(w) \geq n$ gilt \exists Wörter x, y, z mit

$$w = xyz$$

wobei

- $y \neq \epsilon$,
- $\ell(xy) \leq n$

sodass $\forall k \geq 0$

$$x(y)^k z \in L$$

Beweis (1).

angenommen L ist regulär

dann \exists DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit n Zuständen, sodass $L = L(A)$

- obdA L unendlich, sonst ist der Satz trivial
- sei

$$w = a_1 \cdots a_m \quad m \geq n$$

- definiere

$$p_i = \widehat{\delta}(q_0, a_1 \cdots a_i)$$

p_i ist der Zustand von A nach dem Lesen von i Symbolen von w ;
beachte $p_0 = q_0$

- betrachte den Weg



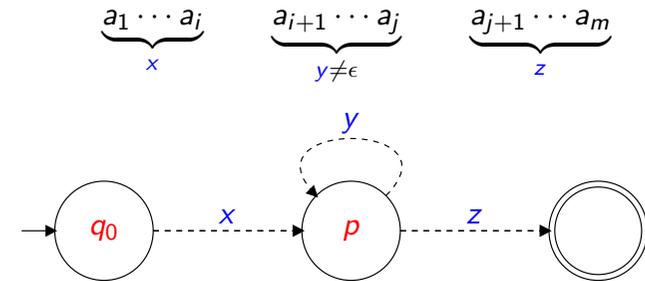
- die p_i können nicht alle verschieden sein: es gibt nur n Zustände

Beweis (2).

- \exists Indices i, j , sodass

$$p_i = p_j =: p \quad i < j$$

- zerlege w :



- für all k wird

$$x(y)^k z$$

akzeptiert: A durchläuft den Weg von p nach p k -mal

Kontraposition des Pumpinglemma

um zu zeigen, dass eine Sprache **nicht regulär** ist, verwendet man die
Kontraposition des Pumpinglemmas

Satz

angenommen

- 1 $\forall n$
- 2 \exists ein String $w \in L$ mit $\ell(w) \geq n$ und
- 3 \forall Zerlegung von w in x, y und z mit
 - $y \neq \epsilon$,
 - $\ell(xy) \leq n$,

$$w = xyz$$

- 4 $\exists k$ mit $x(y)^k z \notin L$

dann ist L **nicht regulär**