Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2011

Zusammenfassung der letzten LV

Satz

die folgenden Mengen sind gleich:

- *die Menge der durch RA beschriebenen Sprachen*
- *die Menge der von DEA akzeptierten Sprachen*
- *die Menge der von NEA akzeptierten Sprachen*
- *die Menge der von ϵ-NEA akzeptierten Sprachen*

Satz ①

sei A ein beliebiger DEA, dann
$\exists$ regulären Ausdruck R, sodass $\mathrm{L}(A) = \mathrm{L}(R)$

Satz ②

sei R ein beliebiger RA, dann $\exists$ ϵ-NEA E, sodass $\mathrm{L}(R) = \mathrm{L}(E)$

Definition

definiere $R_{ij}^{(k)}$ induktiv

Basis $k = 0$

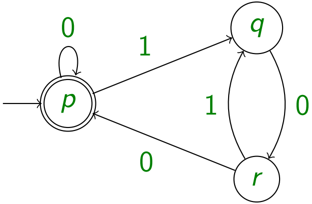
1. Fall $i \neq j$: Kanten zwischen i und j
   - keine solche Kante:
     $$R_{ij}^{(0)} = \varnothing$$
   - eine oder mehrere Kanten $(i, a_1, j), \ldots, (i, a_\ell, j)$:
     $$R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a_1} + \cdots + \mathbf{a}_\ell$$
2. Fall $i = j$
   - zusätzlich repräsentiere die Wege der Länge 0 durch das Leerwort ϵ

Schritt $k > 0$

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

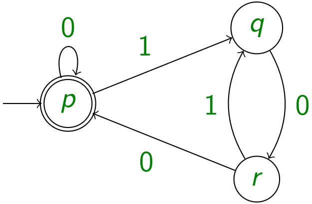
Beispiel

betrachte den DEA A:



Beispiel

betrachte den DEA A:



Frage

wie lautet der RA R, sodass $\mathrm{L}(A) = \mathrm{L}(R)$?

Antwort

setze

$$R = \mathbf{0}^* + \mathbf{0}^*\mathbf{1}(\epsilon + \mathbf{0}\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*\mathbf{0}\mathbf{0}\mathbf{0}^*$$

Begründung: an der Tafel

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Abgeschlossenheit regulärer Sprachen

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen

1. *unter Vereinigung*
2. *unter Schnitt*
3. *unter Komplement*
4. *unter Mengendifferenz*
5. *unter Abschluss (unter Kleene-Stern)*
6. ...

Vereinigung

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung

Vereinigung

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung

Beweis.

- seien A, B reguläre Sprachen
- und seien E, F RAs sodass $A = \mathsf{L}(E)$, $B = \mathsf{L}(F)$

$$A \cup B = \mathsf{L}(E + F)$$

Vereinigung

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung

Beweis.

- seien A, B reguläre Sprachen
- und seien E, F RAs sodass $A = \mathsf{L}(E)$, $B = \mathsf{L}(F)$

$$A \cup B = \mathsf{L}(E + F)$$

∎

Vereinigung

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung

Beweis.

- seien A, B reguläre Sprachen
- und seien E, F RAs sodass $A = \mathsf{L}(E)$, $B = \mathsf{L}(F)$

$$A \cup B = \mathsf{L}(E + F)$$

■

Beispiel

$A = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ endet in } 01\}$ $\quad$ $B = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ endet mit } 10\}$

$E = (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{01}$ $\quad$ $F = (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{10}$

Vereinigung

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung

Beweis.

- seien A, B reguläre Sprachen
- und seien E, F RAs sodass $A = \mathrm{L}(E)$, $B = \mathrm{L}(F)$

$$A \cup B = \mathrm{L}(E + F)$$

∎

Beispiel

$A = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ endet in } 01\}$ $\quad$ $B = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ endet mit } 10\}$

$E = (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{01}$ $\quad$ $F = (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{10}$

$$A \cup B = \mathrm{L}((\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{01} + (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{10}) = \mathrm{L}(((\mathbf{0} + \mathbf{1})^*(\mathbf{01} + \mathbf{10}))$$

Komplement

Definition

sei L eine formale Sprache über dem Alphabet Σ
das Komplement $\sim L$ von L ist $\Sigma^* \setminus L$

Komplement

Definition

sei L eine formale Sprache über dem Alphabet Σ
das Komplement $\sim L$ von L ist $\Sigma^* \setminus L$

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Komplement

Komplement

Definition

sei L eine formale Sprache über dem Alphabet Σ
das Komplement $\sim L$ von L ist $\Sigma^* \setminus L$

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Komplement

Beweis.

- sei L regulär
- $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, sodass $L = \mathrm{L}(A)$

$$\sim L = \mathrm{L}(B) \qquad B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$$

Komplement

Definition

sei L eine formale Sprache über dem Alphabet Σ
das Komplement $\sim L$ von L ist $\Sigma^* \setminus L$

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Komplement

Beweis.

- sei L regulär
- $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, sodass $L = \mathrm{L}(A)$

$$\sim L = \mathrm{L}(B) \qquad B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$$

■

Beispiel: Abgeschlossenheit unter Komplement

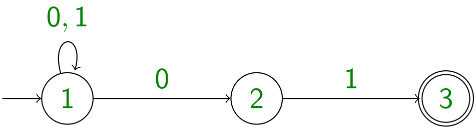
$$L = \mathsf{L}((\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \mathbf{01}) \qquad \sim L = ???$$

Beispiel: Abgeschlossenheit unter Komplement

$$L = \mathsf{L}((\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01}) \qquad \sim L = ???$$

RA $\rightarrow$ NEA

$(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01}$

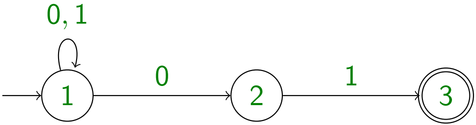


Beispiel: Abgeschlossenheit unter Komplement

$$L = \mathsf{L}((\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{01}) \qquad \sim L = ???$$

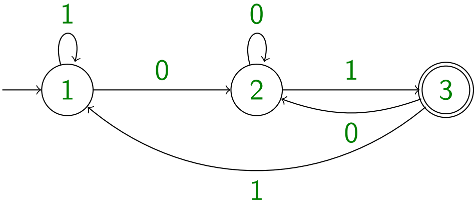
RA $\longrightarrow$ NEA

$(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{01}$



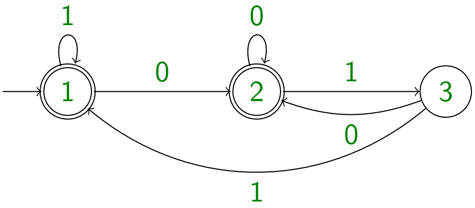
NEA $\longrightarrow$ DEA

$(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{01}$



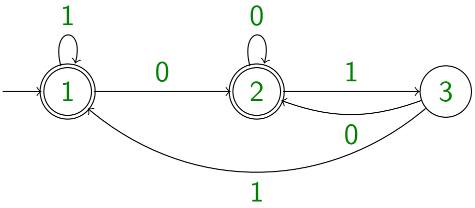
Komplement des DEA

$$\{0,1\}^* \setminus \mathsf{L}((\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01})$$



Komplement des DEA

$$\{0,1\}^* \setminus \mathrm{L}((\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01})$$



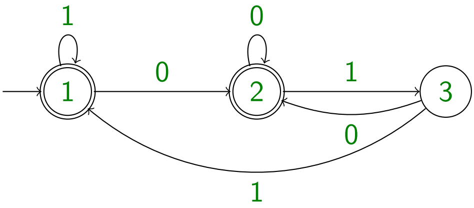
DEA $\longrightarrow$ RA

berechne

$$\begin{aligned} R_{11}^{(3)} &= R_{11}^{(2)} + R_{13}^{(2)}(R_{33}^{(2)})^* R_{31}^{(2)} \quad \text{und} \\ R_{12}^{(3)} &= R_{12}^{(2)} + R_{13}^{(2)}(R_{33}^{(2)})^* R_{32}^{(2)} \end{aligned}$$

Komplement des DEA

$$\{0,1\}^* \setminus L((\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01})$$



DEA $\longrightarrow$ RA

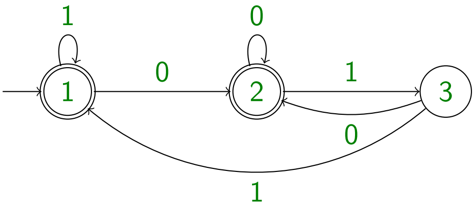
berechne

$$R_{11}^{(3)} = \mathbf{1}^* + (\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+\mathbf{1})^+\mathbf{1}^+ \quad \text{und}$$

$$R_{12}^{(3)} = R_{12}^{(2)} + R_{13}^{(2)}(R_{33}^{(2)})^* R_{32}^{(2)}$$

Komplement des DEA

$$\{0,1\}^* \setminus L((\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01})$$



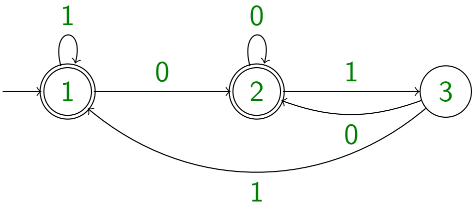
DEA $\longrightarrow$ RA

berechne

$$R_{11}^{(3)} = \mathbf{1}^* + (\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+\mathbf{1})^+\mathbf{1}^+ \quad \text{und}$$
$$R_{12}^{(3)} = (\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+\mathbf{1})^*\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+$$

Komplement des DEA

$$\{0,1\}^* \setminus \mathsf{L}((\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01})$$



DEA $\rightarrow$ RA

berechne

$$\begin{aligned} R_{11}^{(3)} &= \mathbf{1}^* + (\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+\mathbf{1})^+\mathbf{1}^+ \quad \text{und} \\ R_{12}^{(3)} &= (\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+\mathbf{1})^*\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+ \end{aligned}$$

somit gilt

$$\sim L = \mathsf{L}(\mathbf{1}^* + (\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+\mathbf{1})^+\mathbf{1}^+ + (\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+\mathbf{1})^*\mathbf{1}^*\mathbf{0}^+)$$

Durchschnitt

Satz

reguläre Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen

Durchschnitt

Satz

reguläre Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen

Beweis.

seien L, M reguläre Sprachen

- dann gilt $L \cup M$ ist regulär
- $\sim L$ ist regulär

wir wenden das Gesetz von de Morgan an:

$$L \cap M = \sim(\sim L \cup \sim M)$$

Durchschnitt

Satz

reguläre Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen

Beweis.

seien L, M reguläre Sprachen

- dann gilt $L \cup M$ ist regulär
- $\sim L$ ist regulär

wir wenden das Gesetz von de Morgan an:

$$L \cap M = \sim(\sim L \cup \sim M)$$

∎

Durchschnitt (2)

Satz

reguläre Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen

Direkter Beweis.

Durchschnitt (2)

Satz

reguläre Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen

Direkter Beweis.

- seien L, M reguläre Sprachen
- $\exists$ DEA $A_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_L, F_L)$ sodass $L = \mathrm{L}(A_L)$
- $\exists$ DEA $A_M = (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_M, F_M)$ sodass $M = \mathrm{L}(A_M)$

Durchschnitt (2)

Satz

reguläre Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen

Direkter Beweis.

- seien L, M reguläre Sprachen
- $\exists$ DEA $A_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_L, F_L)$ sodass $L = \mathrm{L}(A_L)$
- $\exists$ DEA $A_M = (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_M, F_M)$ sodass $M = \mathrm{L}(A_M)$

wir konstruieren den Produktautomaten $A = A_L \times A_M$:

$$A = (Q_L \times Q_M, \Sigma, \delta, (q_L, q_M), F_L \times F_M)$$

$$\text{mit} \quad \delta((p,q),a) = (\delta_L(p,a), \delta_M(q,a))$$

Durchschnitt (2)

Satz

reguläre Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen

Direkter Beweis.

- seien L, M reguläre Sprachen
- $\exists$ DEA $A_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_L, F_L)$ sodass $L = \mathrm{L}(A_L)$
- $\exists$ DEA $A_M = (Q_M, \Sigma, \delta_M, q_M, F_M)$ sodass $M = \mathrm{L}(A_M)$

wir konstruieren den Produktautomaten $A = A_L \times A_M$:

$$A = (Q_L \times Q_M, \Sigma, \delta, (q_L, q_M), F_L \times F_M)$$

$$\text{mit} \quad \delta((p,q),a) = (\delta_L(p,a), \delta_M(q,a))$$

wir sehen: $\mathrm{L}(A) = \mathrm{L}(A_L) \cap \mathrm{L}(A_M)$

Mengendifferenz

Satz

reguläre Sprachen sind unter Differenz abgeschlossen

Mengendifferenz

Satz

reguläre Sprachen sind unter Differenz abgeschlossen

Beweis.

- seien L, M reguläre Sprachen
- $\sim L$ ist regulär
- dann gilt $L \cap M$ ist regulär

$$L \setminus M = L \cap \sim M$$

Mengendifferenz

Satz

reguläre Sprachen sind unter Differenz abgeschlossen

Beweis.

- seien L, M reguläre Sprachen
- $\sim L$ ist regulär
- dann gilt $L \cap M$ ist regulär

$$L \setminus M = L \cap \sim M$$

∎

Erinnerung: Ausdrucksstärke regulärer Sprachen

Beispiel

betrachte Sprache L, die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

Erinnerung: Ausdrucksstärke regulärer Sprachen

Beispiel

betrachte Sprache L, die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

Beispiel

```
<expression> ::= <condition>
  | if <condition> then <expression> fi
  | <expression> <expression>
```

Frage

Durch regulären Ausdrücke beschreibbar?

Erinnerung: Ausdrucksstärke regulärer Sprachen

Beispiel

betrachte Sprache L, die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

Beispiel

```
<expression> ::= <condition>
  | if <condition> then <expression> fi
  | <expression> <expression>
```

Frage

Durch regulären Ausdrücke beschreibbar?

Antwort

Nein

Wie zeigen wir, dass eine Sprache nicht regulär ist ?

Wie zeigen wir, dass eine Sprache nicht regulär ist ?

Beispiel

betrachte die folgende nicht-reguläre Sprache L:

$$L = \{(^m)^m | m \geqslant 0\} = \{\epsilon, (), (()), ((())), (((()))), \dots\}$$

Wie zeigen wir, dass eine Sprache nicht regulär ist ?

Beispiel

betrachte die folgende nicht-reguläre Sprache L:

$$L = \{(^m)^m | m \geqslant 0\} = \{\epsilon, (), (()), ((())), (((()))), \dots\}$$

- angenommen L wäre regulär: $\exists$ DEA A, $\mathrm{L}(A) = L$
- sei $n = |Q|$ und $m \geqslant n$
- betrache $(^m)^m \in L$:

Wie zeigen wir, dass eine Sprache nicht regulär ist ?

Beispiel

betrachte die folgende nicht-reguläre Sprache L:

$$L = \{(^m)^m | m \geqslant 0\} = \{\epsilon, (), (()), ((())), (((()))), \dots\}$$

- angenommen L wäre regulär: $\exists$ DEA A, $\mathrm{L}(A) = L$
- sei $n = |Q|$ und $m \geqslant n$
- betrache $(^m)^m \in L$:

$$\overbrace{(((((((((((((((((((((((((((((((((}^{m}\overbrace{)))))))))))))))))))))))))))))))))}^{m}$$

Wie zeigen wir, dass eine Sprache nicht regulär ist ?

Beispiel

betrachte die folgende nicht-reguläre Sprache L:

$$L = \{(^m)^m | m \geqslant 0\} = \{\epsilon, (), (()), ((())), (((()))), \dots\}$$

- angenommen L wäre regulär: $\exists$ DEA A, $\mathrm{L}(A) = L$
- sei $n = |Q|$ und $m \geqslant n$
- betrache $(^m)^m \in L$:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ q_0}}{} \overbrace{((((\cdots((}^{m} \underset{\substack{\uparrow \\ q}}{} \overbrace{))\cdots))))}^{m} \underset{\substack{\uparrow \\ r}}{}$$

Wie zeigen wir, dass eine Sprache nicht regulär ist ?

Beispiel

betrachte die folgende nicht-reguläre Sprache L:

$$L = \{(^m)^m | m \geqslant 0\} = \{\epsilon, (), (()), ((())), (((()))), \dots\}$$

- angenommen L wäre regulär: $\exists$ DEA A, $\mathrm{L}(A) = L$
- sei $n = |Q|$ und $m \geqslant n$
- betrache $(^m)^m \in L$:

$$\underbrace{(((((((((((((((((}_{x}\underbrace{((((((((}_{y}\underbrace{(((((((()))))))))))))))))))))))))))))))))}_{z}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ q_0 & p & p & r \end{array}$$

Wie zeigen wir, dass eine Sprache nicht regulär ist ?

Beispiel

betrachte die folgende nicht-reguläre Sprache L:

$$L = \{(^m)^m | m \geqslant 0\} = \{\epsilon, (), (()), ((())), (((()))), \dots\}$$

- angenommen L wäre regulär: $\exists$ DEA A, $\mathrm{L}(A) = L$
- sei $n = |Q|$ und $m \geqslant n$
- betrache $(^m)^m \in L$:

$$\underbrace{(((((((((((((((((}_{x}\underbrace{((((((((}_{y}\underbrace{(((((((()))))))))))))))))))))))))))))))))}_{z}$$

$$\overset{\uparrow}{q_0} \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\uparrow}{r}$$

- Teilstring $y \neq \epsilon$, y kann weggelassen oder vervielfacht werden

Pumpinglemma (Schleifenlemma)

zunächst zeigen wir einen Abschlusseigenschaft von regulären Sprachen

Pumpinglemma (Schleifenlemma)

zunächst zeigen wir einen Abschlusseigenschaft von regulären Sprachen

Satz

Pumpinglemma (Schleifenlemma)

zunächst zeigen wir einen Abschlusseigenschaft von regulären Sprachen

Satz

1. *sei L eine regulära Sprache*

Pumpinglemma (Schleifenlemma)

zunächst zeigen wir einen Abschlusseigenschaft von regulären Sprachen

Satz

1. *sei L eine reguläre Sprache*
2. *dann $\exists$ eine Konstante n*

Pumpinglemma (Schleifenlemma)

zunächst zeigen wir einen Abschlusseigenschaft von regulären Sprachen

Satz

1. *sei L eine reguläre Sprache*
2. *dann $\exists$ eine Konstante n*

   und $\forall$ Wörter $w \in L$, mit $\ell(w) \geqslant n$ gilt

Pumpinglemma (Schleifenlemma)

zunächst zeigen wir einen Abschlusseigenschaft von regulären Sprachen

Satz

1. *sei L eine reguläre Sprache*
2. *dann $\exists$ eine Konstante n*

   und $\forall$ Wörter $w \in L$, mit $\ell(w) \geqslant n$ gilt

   $\exists$ Wörter x, y, z mit

$$w = xyz$$

Pumpinglemma (Schleifenlemma)

zunächst zeigen wir einen Abschlusseigenschaft von regulären Sprachen

Satz

1. *sei L eine reguläre Sprache*
2. *dann $\exists$ eine Konstante n*

   und $\forall$ Wörter $w \in L$, mit $\ell(w) \geqslant n$ gilt

   $\exists$ Wörter x, y, z mit

$$w = xyz$$

wobei

- $y \neq \epsilon$,
- $\ell(xy) \leqslant n$

Pumpinglemma (Schleifenlemma)

zunächst zeigen wir einen Abschlusseigenschaft von regulären Sprachen

Satz

1. *sei L eine reguläre Sprache*
2. *dann $\exists$ eine Konstante n*

   und $\forall$ Wörter $w \in L$, mit $\ell(w) \geqslant n$ gilt

   $\exists$ Wörter x, y, z mit

$$w = xyz$$

   wobei

   - $y \neq \epsilon$,
   - $\ell(xy) \leqslant n$

   sodass $\forall$ $k \geqslant 0$

$$x(y)^k z \in L$$

Beweis (1).

angenommen L ist regulär
dann $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit n Zuständen, sodass $L = \mathrm{L}(A)$

Beweis (1).

angenommen L ist regulär
dann $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit n Zuständen, sodass $L = \mathrm{L}(A)$

- obdA L unendlich, sonst ist der Satz trivial
- sei

$$w = a_1 \cdots a_m \qquad\qquad m \geqslant n$$

Beweis (1).

angenommen L ist regulär
dann $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit n Zuständen, sodass $L = \mathrm{L}(A)$

- obdA L unendlich, sonst ist der Satz trivial
- sei
$$w = a_1 \cdots a_m \qquad\qquad m \geqslant n$$
- definiere
$$p_i = \widehat{\delta}(q_0, a_1 \cdots a_i)$$

Beweis (1).

angenommen L ist regulär
dann $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit n Zuständen, sodass $L = \mathrm{L}(A)$

- obdA L unendlich, sonst ist der Satz trivial
- sei
$$w = a_1 \cdots a_m \qquad\qquad m \geqslant n$$
- definiere
$$p_i = \widehat{\delta}(q_0, a_1 \cdots a_i)$$

p_i ist der Zustand von A nach dem Lesen von i Symbolen von w;
beachte $p_0 = q_0$

Beweis (1).

angenommen L ist regulär
dann $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit n Zuständen, sodass $L = \mathrm{L}(A)$

- obdA L unendlich, sonst ist der Satz trivial
- sei

$$w = a_1 \cdots a_m \qquad\qquad m \geqslant n$$

- definiere

$$p_i = \widehat{\delta}(q_0, a_1 \cdots a_i)$$

p_i ist der Zustand von A nach dem Lesen von i Symbolen von w;
beachte $p_0 = q_0$

- betrachte den Weg

$$\longrightarrow p_0 \longrightarrow p_1 \longrightarrow p_2 \cdots\cdots\rightarrow \qquad \cdots\cdots\rightarrow p_{n-1} \longrightarrow p_n$$

Beweis (1).

angenommen L ist regulär
dann $\exists$ DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit n Zuständen, sodass $L = \mathrm{L}(A)$

- obdA L unendlich, sonst ist der Satz trivial
- sei

$$w = a_1 \cdots a_m \qquad\qquad m \geqslant n$$

- definiere

$$p_i = \widehat{\delta}(q_0, a_1 \cdots a_i)$$

p_i ist der Zustand von A nach dem Lesen von i Symbolen von w; beachte $p_0 = q_0$

- betrachte den Weg

$$\longrightarrow p_0 \longrightarrow p_1 \longrightarrow p_2 \cdots\cdots\rightarrow \qquad \cdots\cdots\rightarrow p_{n-1} \longrightarrow p_n$$

- die p_i können nicht alle verschieden sein: es gibt nur n Zustände

Beweis (2).

- $\exists$ Indices i, j, sodass

$$p_i = p_j =: p \qquad\qquad i < j$$

- zerlege w:

$$\underbrace{a_1 \cdots a_i}_{x} \qquad \underbrace{a_{i+1} \cdots a_j}_{y \neq \epsilon} \qquad \underbrace{a_{j+1} \cdots a_m}_{z}$$

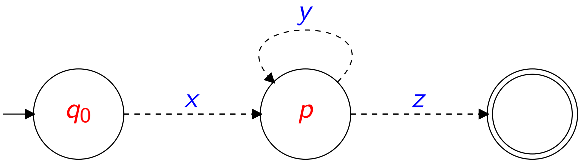
Beweis (2).

- $\exists$ Indices i, j, sodass

$$p_i = p_j =: p \qquad i < j$$

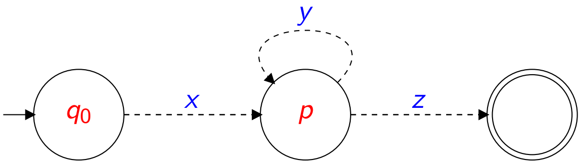
- zerlege w:

$$\underbrace{a_1 \cdots a_i}_{x} \quad \underbrace{a_{i+1} \cdots a_j}_{y \neq \epsilon} \quad \underbrace{a_{j+1} \cdots a_m}_{z}$$



Beweis (2).

- $\exists$ Indices i, j, sodass
$$p_i = p_j =: p \qquad\qquad i < j$$
- zerlege w:
$$\underbrace{a_1 \cdots a_i}_{x} \quad \underbrace{a_{i+1} \cdots a_j}_{y \neq \epsilon} \quad \underbrace{a_{j+1} \cdots a_m}_{z}$$



- für all k wird
$$x(y)^k z$$
akzeptiert: A durchläuft den Weg von p nach p k-mal

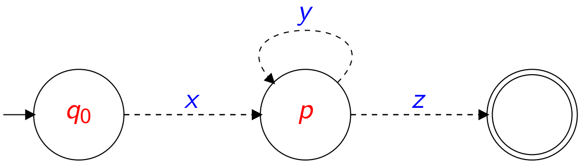
Beweis (2).

- $\exists$ Indices i, j, sodass

$$p_i = p_j =: p \qquad\qquad i < j$$

- zerlege w:

$$\underbrace{a_1 \cdots a_i}_{x} \qquad \underbrace{a_{i+1} \cdots a_j}_{y \neq \epsilon} \qquad \underbrace{a_{j+1} \cdots a_m}_{z}$$



- für all k wird

$$x(y)^k z$$

akzeptiert: A durchläuft den Weg von p nach p k-mal

Kontraposition des Pumpinglemma

um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist, verwendet man die Kontraposition des Pumpinglemmas

Kontraposition des Pumpinglemma

um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist, verwendet man die Kontraposition des Pumpinglemmas

Satz

angenommen

Kontraposition des Pumpinglemma

um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist, verwendet man die Kontraposition des Pumpinglemmas

Satz

angenommen

1. $\forall\ n$

Kontraposition des Pumpinglemma

um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist, verwendet man die Kontraposition des Pumpinglemmas

Satz

angenommen

1. $\forall$ n
2. $\exists$ *ein String* $w \in L$ *mit* $\ell(w) \geqslant n$ *und*

Kontraposition des Pumpinglemma

um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist, verwendet man die Kontraposition des Pumpinglemmas

Satz

angenommen

1. $\forall$ *n*
2. $\exists$ *ein String* $w \in L$ *mit* $\ell(w) \geqslant n$ *und*
3. $\forall$ *Zerlegung von* w *in* x, y *und* z *mit* $\quad w = xyz$
   - $y \neq \epsilon$,
   - $\ell(xy) \leqslant n$,

Kontraposition des Pumpinglemma

um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist, verwendet man die Kontraposition des Pumpinglemmas

Satz

angenommen

1. $\forall\ n$
2. $\exists$ *ein String* $w \in L$ *mit* $\ell(w) \geqslant n$ *und*
3. $\forall$ *Zerlegung von* w *in* x, y *und* z *mit* $\quad w = xyz$
   - $y \neq \epsilon$,
   - $\ell(xy) \leqslant n$,
4. $\exists\ k$ *mit* $x(y)^k z \notin L$

Kontraposition des Pumpinglemma

um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist, verwendet man die Kontraposition des Pumpinglemmas

Satz

angenommen

1. $\forall\ n$
2. $\exists$ *ein String* $w \in L$ *mit* $\ell(w) \geqslant n$ *und*
3. $\forall$ *Zerlegung von* w *in* x, y *und* z *mit* $w = xyz$
   - $y \neq \epsilon$,
   - $\ell(xy) \leqslant n$,
4. $\exists\ k$ *mit* $x(y)^k z \notin L$

dann ist L *nicht regulär*