

## Diskrete Mathematik

Arne Dür      Kurt Girstmair      Simon Legner  
Georg Moser      Harald Zankl



Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik © UIBK  
Sommersemester 2011

### Zusammenfassung der letzten LV

#### Satz

*reguläre Sprachen sind abgeschlossen*

- 1 unter Vereinigung
- 2 unter Schnitt
- 3 unter Komplement
- 4 unter Mengendifferenz
- 5 unter Abschluss (unter Kleene-Stern)
- 6 ...

## Kontraposition des Pumpinglemma

### Satz

angenommen

1  $\forall n$

2  $\exists$  ein String  $w \in L$  mit  $\ell(w) \geq n$  und

3  $\forall$  Zerlegung von  $w$  in  $x, y$  und  $z$  mit

$$w = xyz$$

- $y \neq \epsilon$ ,
- $\ell(xy) \leq n$ ,

4  $\exists k$  mit  $x(y)^k z \notin L$

dann ist  $L$  nicht regulär

## Übersicht

### Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion,  $\epsilon$ -NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

### Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

### Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

## Beispiel

betrachte die Sprache  $L_1$  die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

wir zeigen die Annahmen der Kontraposition des Pumpinglemmas:

- 1 sei  $n$  beliebig
- 2 wir wählen Primzahl  $p$ , sodass

$$p \geq n + 2 \geq n$$

und setzen  $w = 1^p$ ; dann gilt  $\ell(w) \geq n$  und  $w \in L_1$

- 3 zerlege  $w$  in beliebige  $x, y$  und  $z$  mit
  - $y \neq \epsilon$  und
  - $\ell(xy) \leq n$
- 4 sei  $\ell(y) = m$ ; also  $\ell(xz) = p - m$ ; setze  $k = (p - m)$ , wir behaupten:

$$x(y)^{(p-m)}z \notin L_1$$

## Behauptung

$$x(y)^{(p-m)}z \notin L_1$$

## Beweis.

- es gilt:

$$\ell(x(y)^{(p-m)}z) = \overbrace{(p-m)}^{\ell(xz)} + \overbrace{m \cdot (p-m)}^{\ell((y)^k)} = (p-m) \cdot (m+1)$$

- wir sind fertig, wenn:  $(p-m) \neq 1$  und  $(m+1) \neq 1$
- aber  $(m+1) \neq 1$ , da  $m = \ell(y)$  und  $y \neq \epsilon$
- und  $(p-m) \neq 1$ , da

$$m = \ell(y) \leq \ell(xy) \leq n < n + 2 \leq p$$

also

$$(p-m) \geq n + 2 - m \geq n + 2 - n \geq 2$$

## Pumpinglemma als Spiel

### Beobachtung

Kontraposition des Pumpinglemma können wir als 2-Personen-Spiel formulieren; Spielerin 1 gewinnt, wenn die gewählte Sprache  $L$  nicht regulär

### Definition

- 1 Spieler 2 wählt ein beliebiges  $n$
- 2 Spielerin 1 wählt ein Wort  $w \in L$ ,  $\ell(w) \geq n$
- 3 Spieler 2 zerlegt  $w$  in 3 Teile  $x, y, z$ , sodass  $\ell(xy) \leq n$ ,  $y \neq \epsilon$
- 4 Spielerin 1 gewinnt, wenn sie ein  $k$  wählen kann, sodass  $x(y)^k z \notin L$

### Satz

die gewählte Sprache  $L$  ist genau dann nicht regulär, wenn die Spielerin 1 bei allen gültigen Spielzügen gewinnt

### Beispiel

die Sprache  $L_2$  der balanzierten Klammern ist nicht regulär:

$$L_2 = \{({}^m)^m \mid m \geq 0\} = \{\epsilon, (), (()), ((())), ((((()))), \dots\}$$

es spielen Zenzi (Spielerin 1) und Sepp (Spieler 2)

- 1 Sepp wählt als Zahl  $n$
- 2 Zenzi wählt daraufhin das Wort  $w = ({}^n)^n$ , welches in  $L_2$  ist
- 3 Sepp zerlegt  $w$  beliebig in  $x$ ,  $y$  und  $z$   
Er muss darauf achten, dass  $\ell(xy) \leq n$  und  $y \neq \epsilon$
- 4 Zenzi kennt die Zerlegung nicht, trotzdem kann sie aus den Bedingungen und der Kenntnis von  $w$  darauf schließen, dass  $xy = ({}^i$  für  $i \leq n$ ; sie wählt für  $k = 0$

Zenzi gewinnt: in  $xz$  fehlt mindestens eine öffnende Klammer (, obwohl  $xz$  noch dieselbe Anzahl an schließenden Klammern hat

## Anwendung von Abgeschlossenheit

### Beispiel

die Sprache  $L_3$  der Wörter (über  $\{0, 1\}$ ), die genauso viele 0en wie 1er enthalten, ist nicht regulär

### Beispiel

sei  $L_4$  die Sprache über  $\{0, 1\}$ , deren Worte eine **ungleiche** Anzahl von 0en und 1en enthalten

### Frage

Wie zeigt man, dass  $L_4$  nicht regulär ist?

Kontraposition des Pumpinglemmas ist nicht **immer** die richtige Methode um die Nichtregulärität zu zeigen

### Problem

- 1 sei  $n$  beliebig
- 2 wähle  $w \in L_4$ , sodass  $\ell(w) \geq n$
- 3  $\forall x, y, z$  mit  $w = xyz$  mit
  - $y \neq \epsilon$
  - $\ell(xy) \leq n$
- 4 finde  $k$ ; sodass  $x(y)^k z \notin L_4$

Kontraposition des Pumpinglemmas scheitert, wenn die Anzahl von 0en und 1en in  $y$  gleich

### Lösung

**Abschlusseigenschaften** nutzen:

- 1  $L_4 = \sim L_3$
- 2 da  $L_3$  nicht regulär, kann  $L_4$  nicht regulär sein