Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2011

Zusammenfassung der letzten LV

Satz

reguläre Sprachen sind abgeschlossen

1. *unter Vereinigung*
2. *unter Schnitt*
3. *unter Komplement*
4. *unter Mengendifferenz*
5. *unter Abschluss (unter Kleene-Stern)*
6. ...

Kontraposition des Pumpinglemma

Satz

angenommen

1. $\forall$ n
2. $\exists$ *ein String* $w \in L$ *mit* $\ell(w) \geqslant n$ *und*
3. $\forall$ *Zerlegung von* w *in* x, y *und* z *mit* $w = xyz$
   - $y \neq \epsilon$,
   - $\ell(xy) \leqslant n$,
4. $\exists$ k *mit* $x(y)^k z \notin L$

dann ist L *nicht regulär*

Übersicht

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Übersicht

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung,

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Beispiel

betrachte die Sprache L_1 die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

Beispiel

betrachte die Sprache L_1 die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

wir zeigen die Annahmen der Kontraposition des Pumpinglemmas:

Beispiel

betrachte die Sprache L_1 die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

wir zeigen die Annahmen der Kontraposition des Pumpinglemmas:

1. sei n beliebig

Beispiel

betrachte die Sprache L_1 die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

wir zeigen die Annahmen der Kontraposition des Pumpinglemmas:

1. sei n beliebig
2. wir wählen Primzahl p, sodass

$$p \geqslant n + 2 \geqslant n$$

   und setzen $w = 1^p$;

Beispiel

betrachte die Sprache L_1 die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

wir zeigen die Annahmen der Kontraposition des Pumpinglemmas:

1. sei n beliebig
2. wir wählen Primzahl p, sodass

$$p \geqslant n + 2 \geqslant n$$

   und setzen $w = 1^p$; dann gilt $\ell(w) \geqslant n$ und $w \in L_1$

Beispiel

betrachte die Sprache L_1 die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

wir zeigen die Annahmen der Kontraposition des Pumpinglemmas:

1. sei n beliebig
2. wir wählen Primzahl p, sodass
$$p \geqslant n + 2 \geqslant n$$
und setzen $w = 1^p$; dann gilt $\ell(w) \geqslant n$ und $w \in L_1$
3. zerlege w in beliebige x,y und z mit
   - $y \neq \epsilon$ und
   - $\ell(xy) \leqslant n$

Beispiel

betrachte die Sprache L_1 die aus allen Strings von 1ern besteht, deren Anzahl eine Primzahl ist

wir zeigen die Annahmen der Kontraposition des Pumpinglemmas:

1. sei n beliebig
2. wir wählen Primzahl p, sodass
$$p \geqslant n+2 \geqslant n$$
und setzen $w = 1^p$; dann gilt $\ell(w) \geqslant n$ und $w \in L_1$
3. zerlege w in beliebige x,y und z mit
   - $y \neq \epsilon$ und
   - $\ell(xy) \leqslant n$
4. sei $\ell(y) = m$; also $\ell(xz) = p - m$; setze $k = (p - m)$, wir behaupten:
$$x(y)^{(p-m)}z \notin L_1$$

Behauptung

$x(y)^{(p-m)}z \notin L_1$

Behauptung

$x(y)^{(p-m)}z \notin L_1$

Beweis.

Behauptung

$x(y)^{(p-m)}z \notin L_1$

Beweis.

- es gilt:

$$\ell(x(y)^{(p-m)}z) = \overbrace{(p-m)}^{\ell(xz)} + \overbrace{m \cdot (p-m)}^{\ell((y)^k)} = (p-m) \cdot (m+1)$$

Behauptung

$x(y)^{(p-m)}z \notin L_1$

Beweis.

- es gilt:

$$\ell(x(y)^{(p-m)}z) = \overbrace{(p-m)}^{\ell(xz)} + \overbrace{m \cdot (p-m)}^{\ell((y)^k)} = (p-m) \cdot (m+1)$$

- wir sind fertig, wenn: $(p-m) \neq 1$ und $(m+1) \neq 1$

Behauptung

$x(y)^{(p-m)}z \notin L_1$

Beweis.

- es gilt:

$$\ell(x(y)^{(p-m)}z) = \overbrace{(p-m)}^{\ell(xz)} + \overbrace{m \cdot (p-m)}^{\ell((y)^k)} = (p-m) \cdot (m+1)$$

- wir sind fertig, wenn: $(p-m) \neq 1$ und $(m+1) \neq 1$
- aber $(m+1) \neq 1$, da $m = \ell(y)$ und $y \neq \epsilon$

Behauptung

$x(y)^{(p-m)}z \notin L_1$

Beweis.

- es gilt:

$$\ell(x(y)^{(p-m)}z) = \overbrace{(p-m)}^{\ell(xz)} + \overbrace{m \cdot (p-m)}^{\ell((y)^k)} = (p-m) \cdot (m+1)$$

- wir sind fertig, wenn: $(p-m) \neq 1$ und $(m+1) \neq 1$
- aber $(m+1) \neq 1$, da $m = \ell(y)$ und $y \neq \epsilon$
- und $(p-m) \neq 1$, da

$$m = \ell(y) \leqslant \ell(xy) \leqslant n < n+2 \leqslant p$$

also

$$(p-m) \geqslant n+2-m$$

Behauptung

$x(y)^{(p-m)}z \notin L_1$

Beweis.

- es gilt:

$$\ell(x(y)^{(p-m)}z) = \overbrace{(p-m)}^{\ell(xz)} + \overbrace{m \cdot (p-m)}^{\ell((y)^k)} = (p-m) \cdot (m+1)$$

- wir sind fertig, wenn: $(p-m) \neq 1$ und $(m+1) \neq 1$
- aber $(m+1) \neq 1$, da $m = \ell(y)$ und $y \neq \epsilon$
- und $(p-m) \neq 1$, da

$$m = \ell(y) \leqslant \ell(xy) \leqslant n < n+2 \leqslant p$$

also

$$(p-m) \geqslant n+2-m \geqslant n+2-n$$

Behauptung

$x(y)^{(p-m)}z \notin L_1$

Beweis.

- es gilt:

$$\ell(x(y)^{(p-m)}z) = \overbrace{(p-m)}^{\ell(xz)} + \overbrace{m \cdot (p-m)}^{\ell((y)^k)} = (p-m) \cdot (m+1)$$

- wir sind fertig, wenn: $(p-m) \neq 1$ und $(m+1) \neq 1$
- aber $(m+1) \neq 1$, da $m = \ell(y)$ und $y \neq \epsilon$
- und $(p-m) \neq 1$, da

$$m = \ell(y) \leqslant \ell(xy) \leqslant n < n+2 \leqslant p$$

also

$$(p-m) \geqslant n+2-m \geqslant n+2-n \geqslant 2$$

Behauptung

$x(y)^{(p-m)}z \notin L_1$

Beweis.

- es gilt:

$$\ell(x(y)^{(p-m)}z) = \overbrace{(p-m)}^{\ell(xz)} + \overbrace{m \cdot (p-m)}^{\ell((y)^k)} = (p-m) \cdot (m+1)$$

- wir sind fertig, wenn: $(p-m) \neq 1$ und $(m+1) \neq 1$
- aber $(m+1) \neq 1$, da $m = \ell(y)$ und $y \neq \epsilon$
- und $(p-m) \neq 1$, da

$$m = \ell(y) \leqslant \ell(xy) \leqslant n < n+2 \leqslant p$$

  also

$$(p-m) \geqslant n+2-m \geqslant n+2-n \geqslant 2$$

∎

Pumpinglemma als Spiel

Beobachtung

Kontrapostion des Pumpinglemma können wir als 2-Personen-Spiel formulieren; Spielerin 1 gewinnt, wenn die gewählte Sprache L nicht regulär

Pumpinglemma als Spiel

Beobachtung

Kontrapostion des Pumpinglemma können wir als 2-Personen-Spiel formulieren; Spielerin 1 gewinnt, wenn die gewählte Sprache L nicht regulär

Definition

Pumpinglemma als Spiel

Beobachtung

Kontrapostion des Pumpinglemma können wir als 2-Personen-Spiel formulieren; Spielerin 1 gewinnt, wenn die gewählte Sprache L nicht regulär

Definition

1. Spieler 2 wählt ein beliebiges n

Pumpinglemma als Spiel

Beobachtung

Kontrapostion des Pumpinglemma können wir als 2-Personen-Spiel formulieren; Spielerin 1 gewinnt, wenn die gewählte Sprache L nicht regulär

Definition

1. Spieler 2 wählt ein beliebiges n
2. Spielerin 1 wählt ein Wort $w \in L$, $\ell(w) \geqslant n$

Pumpinglemma als Spiel

Beobachtung

Kontrapostion des Pumpinglemma können wir als 2-Personen-Spiel formulieren; Spielerin 1 gewinnt, wenn die gewählte Sprache L nicht regulär

Definition

1. Spieler 2 wählt ein beliebiges n
2. Spielerin 1 wählt ein Wort $w \in L$, $\ell(w) \geqslant n$
3. Spieler 2 zerlegt w in 3 Teile x,y,z, sodass $\ell(xy) \leqslant n$, $y \neq \epsilon$

Pumpinglemma als Spiel

Beobachtung

Kontrapostion des Pumpinglemma können wir als 2-Personen-Spiel formulieren; Spielerin 1 gewinnt, wenn die gewählte Sprache L nicht regulär

Definition

1. Spieler 2 wählt ein beliebiges n
2. Spielerin 1 wählt ein Wort $w \in L$, $\ell(w) \geqslant n$
3. Spieler 2 zerlegt w in 3 Teile x,y,z, sodass $\ell(xy) \leqslant n$, $y \neq \epsilon$
4. Spielerin 1 gewinnt, wenn sie ein k wählen kann, sodass $x(y)^k z \notin L$

Pumpinglemma als Spiel

Beobachtung

Kontrapostion des Pumpinglemma können wir als 2-Personen-Spiel formulieren; Spielerin 1 gewinnt, wenn die gewählte Sprache L nicht regulär

Definition

1. Spieler 2 wählt ein beliebiges n
2. Spielerin 1 wählt ein Wort $w \in L$, $\ell(w) \geqslant n$
3. Spieler 2 zerlegt w in 3 Teile x,y,z, sodass $\ell(xy) \leqslant n$, $y \neq \epsilon$
4. Spielerin 1 gewinnt, wenn sie ein k wählen kann, sodass $x(y)^k z \notin L$

Satz

die gewählte Sprache L ist genau dann nicht regulär, wenn die Spielerin 1 bei allen gültigen Spielzügen gewinnt

Beispiel

die Sprache L_2 der balanzierten Klammern ist nicht regulär:

$$L_2 = \{(^m)^m | m \geqslant 0\} = \{\epsilon, (), (()), ((())), (((()))), \dots\}$$

Beispiel

die Sprache L_2 der balanzierten Klammern ist nicht regulär:

$$L_2 = \{(^m)^m | m \geqslant 0\} = \{\epsilon, (), (()), ((())), (((()))), \dots\}$$

es spielen Zenzi (Spielerin 1) und Sepp (Spieler 2)

1. Sepp wählt als Zahl n

Beispiel

die Sprache L_2 der balanzierten Klammern ist nicht regulär:

$$L_2 = \{(^m)^m | m \geqslant 0\} = \{\epsilon, (), (()), ((())), (((()))), \ldots\}$$

es spielen Zenzi (Spielerin 1) und Sepp (Spieler 2)

1. Sepp wählt als Zahl n
2. Zenzi wählt daraufhin das Wort $w = (^n)^n$, welches in L_2 ist

Beispiel

die Sprache L_2 der balanzierten Klammern ist nicht regulär:

$$L_2 = \{(^m)^m | m \geqslant 0\} = \{\epsilon, (), (()), ((())), (((()))), \dots\}$$

es spielen Zenzi (Spielerin 1) und Sepp (Spieler 2)

1. Sepp wählt als Zahl n
2. Zenzi wählt daraufhin das Wort $w = (^n)^n$, welches in L_2 ist
3. Sepp zerlegt w beliebig in x, y und z
   Er muss darauf achten, dass $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$

Beispiel

die Sprache L_2 der balanzierten Klammern ist nicht regulär:

$$L_2 = \{(^m)^m | m \geqslant 0\} = \{\epsilon, (), (()), ((())), (((()))), \dots\}$$

es spielen Zenzi (Spielerin 1) und Sepp (Spieler 2)

1. Sepp wählt als Zahl n
2. Zenzi wählt daraufhin das Wort $w = (^n)^n$, welches in L_2 ist
3. Sepp zerlegt w beliebig in x, y und z
   Er muss darauf achten, dass $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$
4. Zenzi kennt die Zerlegung nicht, trotzdem kann sie aus den Bedingungen und der Kenntnis von w darauf schließen, dass $xy = (^i$ für $i \leqslant n$; sie wählt für $k = 0$

Beispiel

die Sprache L_2 der balanzierten Klammern ist nicht regulär:

$$L_2 = \{(^m)^m | m \geqslant 0\} = \{\epsilon, (), (()), ((())), (((()))), \dots\}$$

es spielen Zenzi (Spielerin 1) und Sepp (Spieler 2)

1. Sepp wählt als Zahl n
2. Zenzi wählt daraufhin das Wort $w = (^n)^n$, welches in L_2 ist
3. Sepp zerlegt w beliebig in x, y und z
   Er muss darauf achten, dass $\ell(xy) \leqslant n$ und $y \neq \epsilon$
4. Zenzi kennt die Zerlegung nicht, trotzdem kann sie aus den Bedingungen und der Kenntnis von w darauf schließen, dass $xy = (^i$ für $i \leqslant n$; sie wählt für $k = 0$

Zenzi gewinnt: in xz fehlt mindestens eine öffnende Klammer (, obwohl xz noch dieselbe Anzahl an schließenden Klammern hat

Anwendung von Abgeschlossenheit

Beispiel

die Sprache L_3 der Wörter (über $\{0, 1\}$), die genauso viele 0en wie 1er enthalten, ist nicht regulär

Anwendung von Abgeschlossenheit

Beispiel

die Sprache L_3 der Wörter (über $\{0, 1\}$), die genauso viele 0en wie 1er enthalten, ist nicht regulär

Beispiel

sei L_4 die Sprache über $\{0, 1\}$, deren Worte eine ungleiche Anzahl von 0en und 1en enthalten

Anwendung von Abgeschlossenheit

Beispiel

die Sprache L_3 der Wörter (über $\{0, 1\}$), die genauso viele 0en wie 1er enthalten, ist nicht regulär

Beispiel

sei L_4 die Sprache über $\{0, 1\}$, deren Worte eine ungleiche Anzahl von 0en und 1en enthalten

Frage

Wie zeigt man, dass L_4 nicht regulär ist?

Anwendung von Abgeschlossenheit

Beispiel

die Sprache L_3 der Wörter (über $\{0, 1\}$), die genauso viele 0en wie 1er enthalten, ist nicht regulär

Beispiel

sei L_4 die Sprache über $\{0, 1\}$, deren Worte eine ungleiche Anzahl von 0en und 1en enthalten

Frage

Wie zeigt man, dass L_4 nicht regulär ist?

Kontraposition des Pumpinglemmas ist nicht immer die richtige Methode um die Nichtregulärität zu zeigen

Problem

Problem

1. sei n beliebig

Problem

1. sei n beliebig
2. wähle $w \in L_4$, sodass $\ell(w) \geqslant n$

Problem

1. sei n beliebig
2. wähle $w \in L_4$, sodass $\ell(w) \geqslant n$
3. $\forall$ x, y, z mit $w = xyz$ mit
   - $y \neq \epsilon$
   - $\ell(xy) \leqslant n$

Problem

1. sei n beliebig
2. wähle $w \in L_4$, sodass $\ell(w) \geqslant n$
3. $\forall\ x, y, z$ mit $w = xyz$ mit
   - $y \neq \epsilon$
   - $\ell(xy) \leqslant n$
4. finde k; sodass $x(y)^k z \notin L_4$

Problem

1. sei n beliebig
2. wähle $w \in L_4$, sodass $\ell(w) \geqslant n$
3. $\forall\ x, y, z$ mit $w = xyz$ mit
   - $y \neq \epsilon$
   - $\ell(xy) \leqslant n$
4. finde k; sodass $x(y)^k z \notin L_4$

Kontraposition des Pumpinglemmas scheitert, wenn die Anzahl von 0en und 1en in y gleich

Problem

1. sei n beliebig
2. wähle $w \in L_4$, sodass $\ell(w) \geqslant n$
3. $\forall$ x, y, z mit $w = xyz$ mit
   - $y \neq \epsilon$
   - $\ell(xy) \leqslant n$
4. finde k; sodass $x(y)^k z \notin L_4$

Kontraposition des Pumpinglemmas scheitert, wenn die Anzahl von 0en und 1en in y gleich

Lösung

Abschlusseigenschaften nutzen:

1. $L_4 = \sim L_3$
2. da L_3 nicht regular, kann L_4 nicht regulär sein