Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2011

Zusammenfassung der letzten LV

Satz

angenommen

1. $\forall$ n
2. $\exists$ ein String $w \in L$ mit $\ell(w) \geqslant n$ und
3. $\forall$ Zerlegung von w in x, y und z mit $w = xyz$
   - $y \neq \epsilon$,
   - $\ell(xy) \leqslant n$,
4. $\exists$ k mit $x(y)^k z \notin L$

dann ist L nicht regulär

Beispiel

die Sprache L über $\{0, 1\}$, deren Worte eine ungleiche Anzahl von 0en und 1en enthalten, ist nicht regulär

Übersicht

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

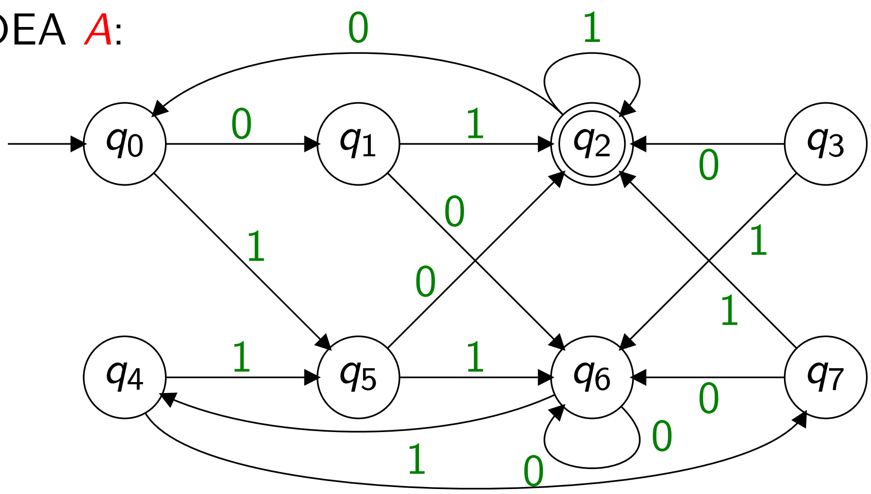
Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Beispiel

betrachte DEA A:



Frage

Kann der Automat A vereinfacht werden?

Antwort

Ja, denn intuitiv sind die folgenden Zustandspaare äquivalent

$$(q_0, q_4) \qquad (q_1, q_7) \qquad (q_3, q_5)$$

Zustandsäquivalenz

sei A ein DEA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Definition

Zustände p und q heißen äquivalent wenn

- $\forall$ Strings w
  $\widehat{\delta}(p, w)$ genau dann akzeptierend, wenn $\widehat{\delta}(q, w)$ akzeptierend

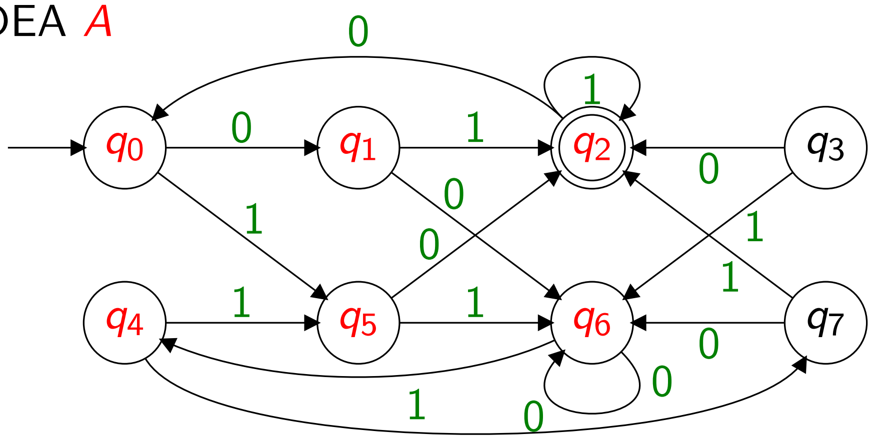
Definition

Zustände p und q heißen unterscheidbar wenn

- $\exists$ String w
  $\widehat{\delta}(p, w)$ akzeptierend, $\widehat{\delta}(q, w)$ nicht akzeptierend (oder umgekehrt)

Beispiel

betrachte DEA A



betrachte q_0 und q_6:

- ϵ, 0 ,1 unterscheiden nicht
- aber $\widehat{\delta}(q_0, 01) = q_2 \in F$
- $\widehat{\delta}(q_6, 01) = q_4 \notin F$
- also sind q_0 und q_6 unterscheidbar

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA (nach der ursprünglichen Definition)

Definition

1. Basis
   wenn p akzeptierend und q nicht,
   dann sind $\{p, q\}$ unterscheidbar
2. Schritt
   sei a ein Eingabezeichen und
   - sei $\delta(p, a) = r$, $\delta(q, a) = s$
   - sodass $\{r, s\}$ unterscheidbar

   dann sind $\{p, q\}$ unterscheidbar

Satz

sind Zustände p, q nach der induktiven Definition nicht unterscheidbar, dann sind sie auch äquivalent

Beweis.

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

1. angenommen, der Satz wäre falsch
2. induktive Definition unterscheidet nicht zwischen p und q
3. aber p und q sind nicht äquivalent, also
   $\exists\ w$, sodass
   $$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(q, w) \notin F$$
4. wir wählen $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ minimal; oBdA $w \neq \epsilon$
5. sei $r = \delta(p, a_1)$, $s = \delta(q, a_1)$
6. nach Voraussetzung gilt
   - $\widehat{\delta}(r, a_2 \cdots a_n) \in F$, $\widehat{\delta}(s, a_2 \cdots a_n) \notin F$
   - und die induktive Definition unterscheidet zwischen r und s
7. dann sind aber auch p, q unterscheidbar nach der induktiven Definition; das ist ein Widerspruch

■

wir schreiben die induktive Definition in einen Algorithmus um

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA

Table-Filling Algorithmus

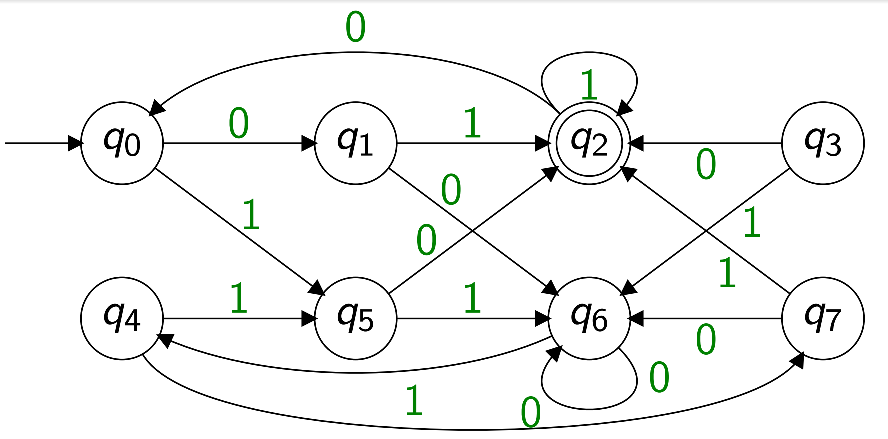
1. wenn p akzeptierend und q nicht, dann markiere $\{p, q\}$ als unterscheidbar
2. sei a ein Eingabezeichen und
   - sei $\delta(p, a) = r$, $\delta(q, a) = s$
   - sodass $\{r, s\}$ markiert

   dann markiere $\{p, q\}$ als unterscheidbar

Fakten

- der Table-Filling Algorithmus ist korrekt
- das heißt, wenn das Paar $\{p, q\}$ nicht markiert werden kann, dann sind p und q äquivalent

Beispiel



q_0							
✓	q_1						
✓	✓	q_2					
✓	✓	✓	q_3				
	✓	✓	✓	q_4			
✓	✓	✓		✓	q_5		
✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_6	
✓		✓	✓	✓	✓	✓	q_7

Table-Filling Algorithmus liefert die folgenden Zustandsblöcke:

$\{q_0, q_4\}$, $\{q_1, q_7\}$, $\{q_3, q_5\}$, $\{q_2\}$, $\{q_6\}$

Satz

1. *die Äquivalenz von Zuständen ist transitiv: wenn (i) Zustände p und q äquivalent und (ii) Zustände q und r äquivalent, dann sind auch p und r äquivalent*
2. *die Blöcke der äquivalenten Zustände formen eine Partition*

Beweis.

- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- angenommen $\{p, q\}$ und $\{q, r\}$ sind äquivalent, aber $\{p, r\}$ sind unterscheidbar
- $\exists$ String w

$$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(r, w) \notin F$$

- also $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$ sonst wären q und r unterscheidbar
- also $\widehat{\delta}(p, w) \in F$ und $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$,
- somit sind p und q unterscheidbar: Widerspruch ∎

Definition

DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
konstruiere $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$:

1. unerreichbare Zustände eliminieren
2. partitioniere die Zustände in äquivalente Blöcke
3. Q_B sind die verschiedenen Blöcke
4. $\forall$ Blöcke S, $\forall$ a ein Eingabesymbol:
   $\exists$ Block T, sodass für alle $q \in S$ gilt $\delta(q, a) \in T$
   setze $\delta_B(S, a) = T$
5. q_B ist der Block, der q_0 enthält
6. F_B ist die Menge der Blöcke, die Zustände aus F enthalten

Beobachtung

nicht anwendbar für deterministische Automaten nach der erweiterten Definition

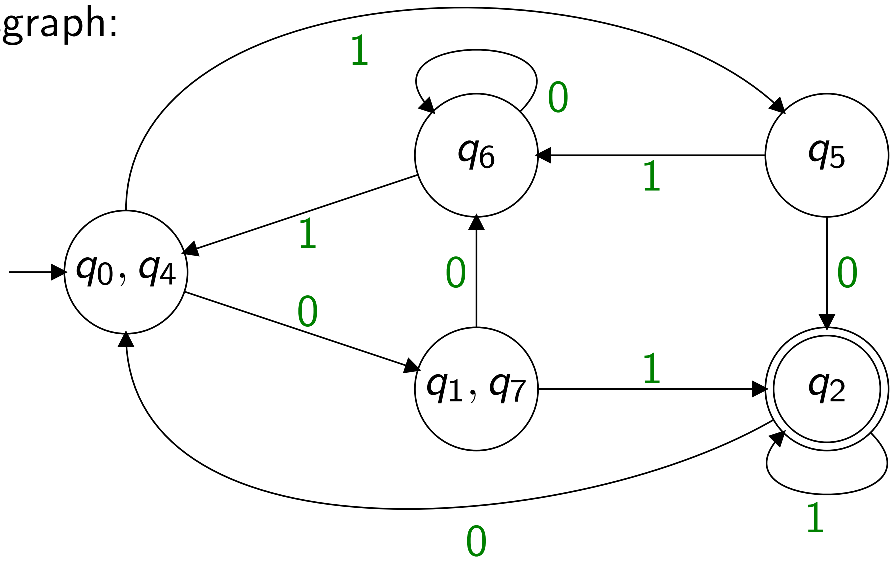
Beispiel

Minimierung des Automaten A:

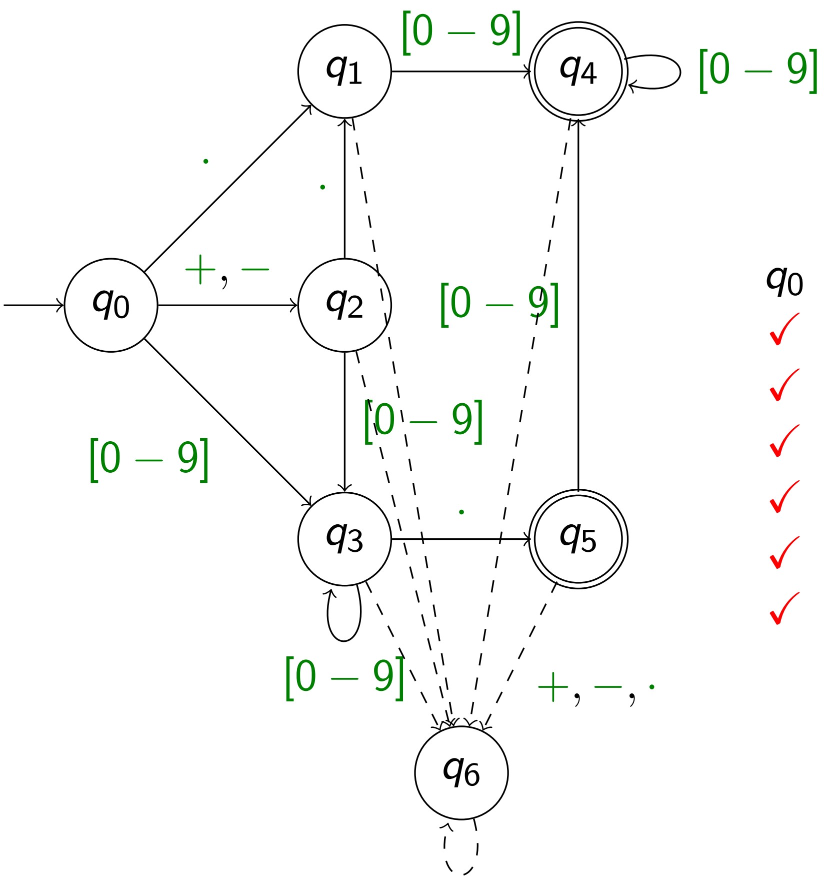
1. alle Zustände, außer q_3, sind erreichbar
2. Zustände des minimierten Automaten B:

$$\{q_0, q_4\} \quad \{q_1, q_7\} \quad \{q_2\} \quad \{q_5\} \quad \{q_6\}$$

3. Zustandsgraph:

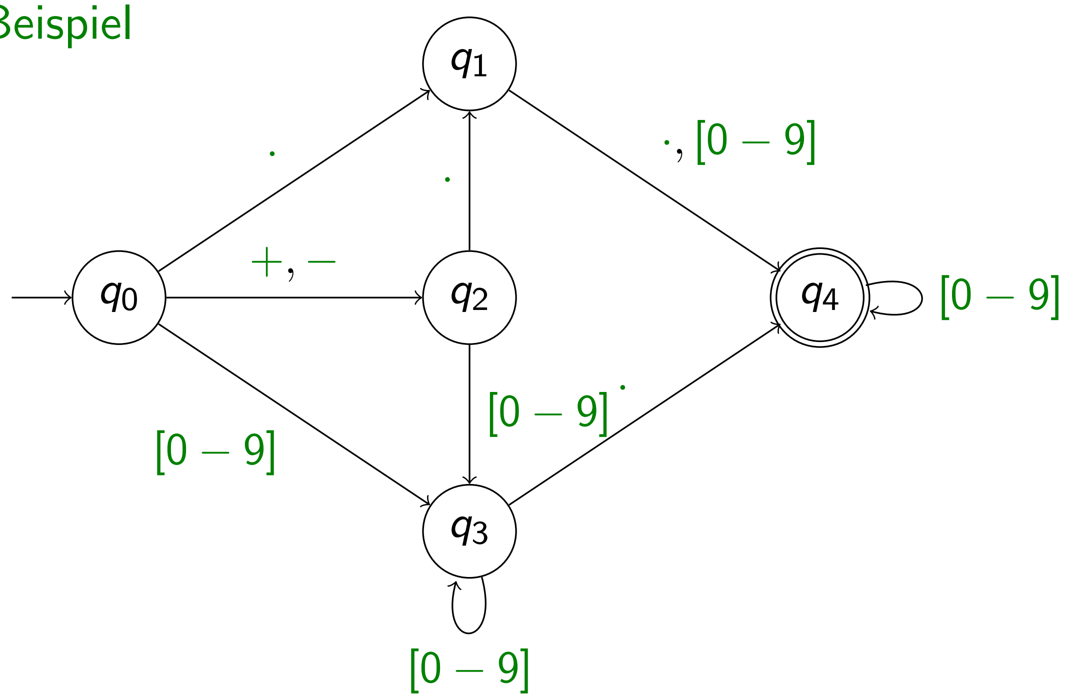


Beispiel: Der Dezimalzahlautomat



q_0						
✓	q_1					
✓	✓	q_2				
✓	✓	✓	q_3			
✓	✓	✓	✓	q_4		
✓	✓	✓	✓		q_5	
✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_6

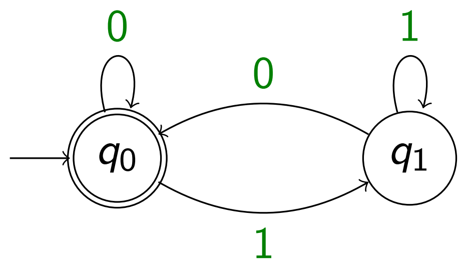
Beispiel

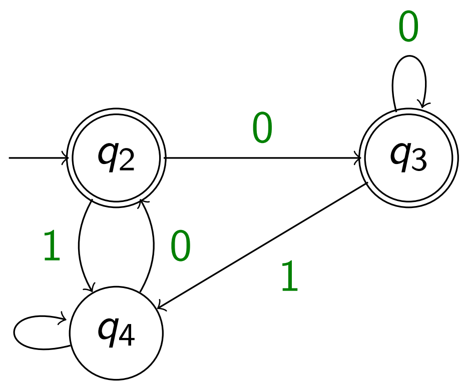


Satz

1. *der Minimierungsalgorithmus ist optimal*
2. *das Ergebnis des Minimierungsalgorithmus ist eindeutig*

Beispiel





Beobachtung

- beide DEAs akzeptieren $L(\epsilon + (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{0})$
- zur Kontrolle wenden wir den Table-Filling Algorithmus auf einen Automat mit zwei Startzuständen an:

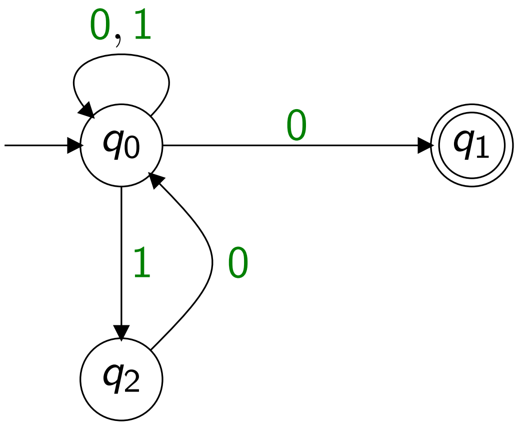
q_0				
✓	q_1			
	✓	q_2		
	✓		q_3	
✓		✓	✓	q_4

Minimierung eines NEA

Beobachtung

Minimierungsalgorithmus ist nicht korrekt für NEAs

Beweis.



- Zustände $\{q_0, q_1\}$ sowie $\{q_1, q_2\}$ sind unterscheidbar
- ebenso ist $\{q_0, q_2\}$ unterscheidbar bei Eingabe 0
- aber Zustand q_2 ist überflüssig

■