

Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik © UIBK
Sommersemester 2011



Übersicht

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ -NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, **Minimierung**

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Zusammenfassung der letzten LV

Satz

angenommen

- 1 $\forall n$
- 2 \exists ein String $w \in L$ mit $\ell(w) \geq n$ und
- 3 \forall Zerlegung von w in x, y und z mit
 - $y \neq \epsilon$,
 - $\ell(xy) \leq n$,
- 4 $\exists k$ mit $x(y)^k z \notin L$

$w = xyz$

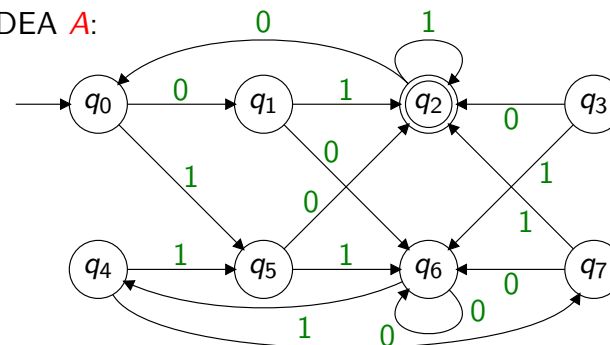
dann ist L **nicht regulär**

Beispiel

die Sprache L über $\{0, 1\}$, deren Worte eine **ungleiche** Anzahl von 0en und 1en enthalten, ist nicht regulär

Beispiel

betrachte DEA A :



Frage

Kann der Automat A vereinfacht werden?

Antwort

Ja, denn intuitiv sind die folgenden Zustandspaare **äquivalent**

(q_0, q_4) (q_1, q_7) (q_3, q_5)

Zustandsäquivalenz

sei A ein DEA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Definition

Zustände p und q heißen **äquivalent** wenn

- \forall Strings w
 $\widehat{\delta}(p, w)$ genau dann akzeptierend, wenn $\widehat{\delta}(q, w)$ akzeptierend

Definition

Zustände p und q heißen **unterscheidbar** wenn

- \exists String w
 $\widehat{\delta}(p, w)$ akzeptierend, $\widehat{\delta}(q, w)$ nicht akzeptierend (oder umgekehrt)

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA (nach der ursprünglichen Definition)

Definition

1 Basis

wenn p akzeptierend und q nicht,
dann sind $\{p, q\}$ unterscheidbar

2 Schritt

sei a ein Eingabezeichen und

- sei $\delta(p, a) = r, \delta(q, a) = s$
- sodass $\{r, s\}$ unterscheidbar

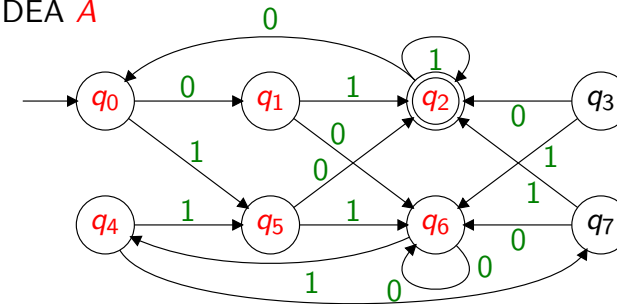
dann sind $\{p, q\}$ unterscheidbar

Satz

sind Zustände p, q nach der induktiven Definition **nicht unterscheidbar**,
dann sind sie auch **äquivalent**

Beispiel

betrachte DEA A



betrachte q_0 und q_6 :

- $\epsilon, 0, 1$ unterscheiden nicht
- aber $\widehat{\delta}(q_0, 01) = q_2 \in F$
- $\widehat{\delta}(q_6, 01) = q_4 \notin F$
- also sind q_0 und q_6 unterscheidbar

Beweis.

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- 1 angenommen, der Satz wäre falsch
- 2 induktive Definition unterscheidet nicht zwischen p und q
- 3 aber p und q sind nicht äquivalent, also
 $\exists w$, sodass

$$\widehat{\delta}(p, w) \in F \quad \widehat{\delta}(q, w) \notin F$$

- 4 wir wählen $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ minimal; oBdA $w \neq \epsilon$
- 5 sei $r = \delta(p, a_1), s = \delta(q, a_1)$
- 6 nach Voraussetzung gilt
 - $\widehat{\delta}(r, a_2 \cdots a_n) \in F, \widehat{\delta}(s, a_2 \cdots a_n) \notin F$
 - und die induktive Definition unterscheidet zwischen r und s
- 7 dann sind aber auch p, q unterscheidbar nach der induktiven Definition; das ist ein Widerspruch

wir schreiben die induktive Definition in einen Algorithmus um

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA

Table-Filling Algorithmus

- 1 wenn p akzeptierend und q nicht, dann markiere $\{p, q\}$ als unterscheidbar
- 2 sei a ein Eingabezeichen und
 - sei $\delta(p, a) = r, \delta(q, a) = s$
 - sodass $\{r, s\}$ markiert
 dann markiere $\{p, q\}$ als unterscheidbar

Fakten

- der Table-Filling Algorithmus ist korrekt
- das heißt, wenn das Paar $\{p, q\}$ nicht markiert werden kann, dann sind p und q äquivalent

Satz

- 1 die Äquivalenz von Zuständen ist transitiv: wenn (i) Zustände p und q äquivalent und (ii) Zustände q und r äquivalent, dann sind auch p und r äquivalent
- 2 die Blöcke der äquivalenten Zustände formen eine Partition

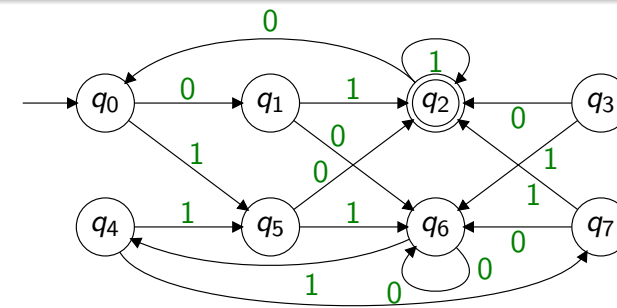
Beweis.

- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- angenommen $\{p, q\}$ und $\{q, r\}$ sind äquivalent, aber $\{p, r\}$ sind unterscheidbar
- \exists String w

$$\widehat{\delta}(p, w) \in F \quad \widehat{\delta}(r, w) \notin F$$

- also $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$ sonst wären q und r unterscheidbar
- also $\widehat{\delta}(p, w) \in F$ und $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$,
- somit sind p und q unterscheidbar: Widerspruch

Beispiel



q_0							
✓	✓						
✓	✓	✓					
✓	✓	✓	✓				
	✓	✓	✓	✓			
✓	✓	✓	✓	✓			
✓	✓	✓	✓	✓	✓		
✓		✓	✓	✓	✓	✓	
							✓

Table-Filling Algorithmus liefert die folgenden Zustandsblöcke:

$\{q_0, q_4\}, \{q_1, q_7\}, \{q_3, q_5\},$
 $\{q_2\}, \{q_6\}$

Definition

DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

konstruiere $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$:

- 1 unerreichbare Zustände eliminieren
- 2 partitioniere die Zustände in äquivalente Blöcke
- 3 Q_B sind die verschiedenen Blöcke
- 4 \forall Blöcke $S, \forall a$ ein Eingabesymbol:
 \exists Block T , sodass für alle $q \in S$ gilt $\delta(q, a) \in T$
 setze $\delta_B(S, a) = T$
- 5 q_B ist der Block, der q_0 enthält
- 6 F_B ist die Menge der Blöcke, die Zustände aus F enthalten

Beobachtung

nicht anwendbar für deterministische Automaten nach der erweiterten Definition

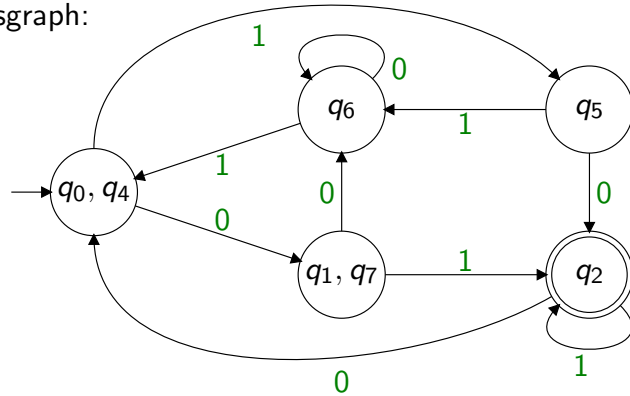
Beispiel

Minimierung des Automaten *A*:

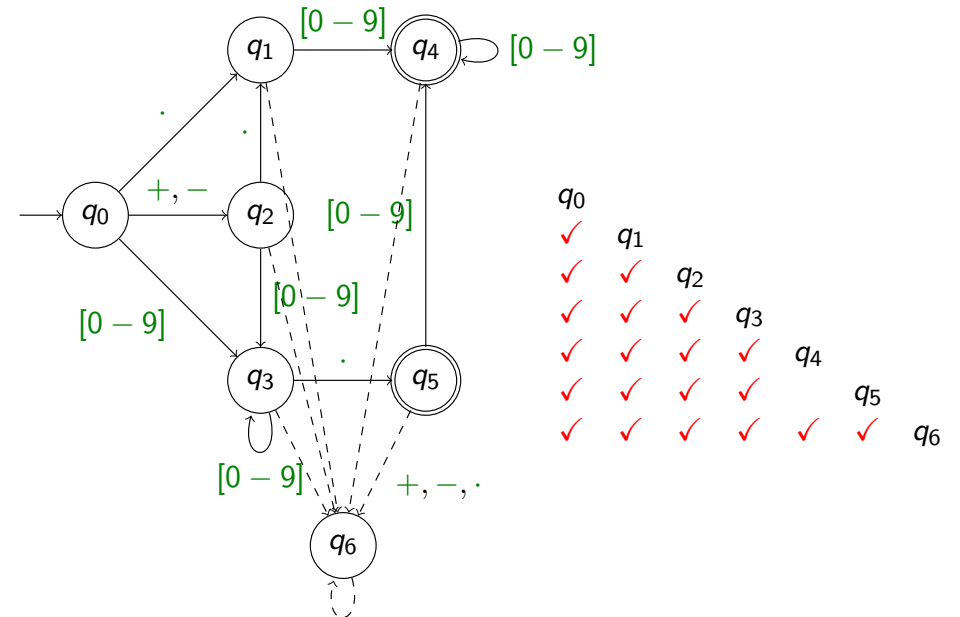
- 1 alle Zustände, außer q_3 , sind erreichbar
- 2 Zustände des minimierten Automaten *B*:

$\{q_0, q_4\}$ $\{q_1, q_7\}$ $\{q_2\}$ $\{q_5\}$ $\{q_6\}$

- 3 Zustandsgraph:

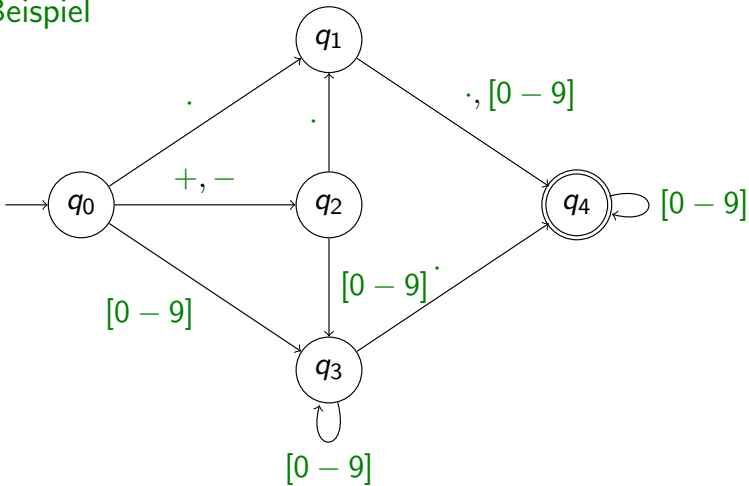


Beispiel: Der Dezimalzahlautomat



q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

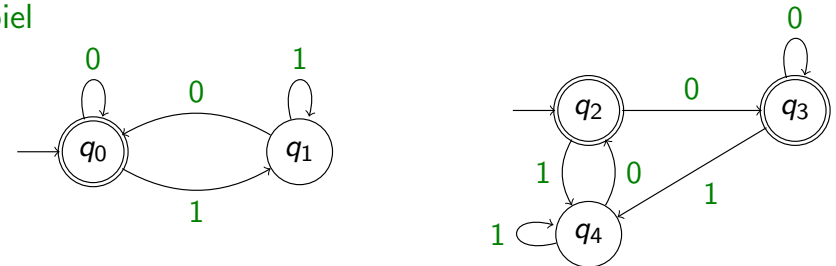
Beispiel



Satz

- 1 der Minimierungsalgorithmus ist *optimal*
- 2 das Ergebnis des Minimierungsalgorithmus ist *eindeutig*

Beispiel



Beobachtung

- beide DEAs akzeptieren $L(\epsilon + (0 + 1)^*0)$
- zur Kontrolle wenden wir den **Table-Filling Algorithmus** auf einen Automaten mit zwei Startzuständen an:

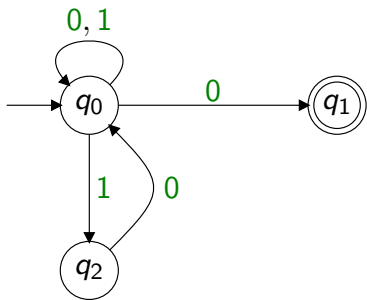
q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
✓	✓	✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓	✓

Minimierung eines NEA

Beobachtung

Minimierungsalgorithmus ist **nicht** korrekt für NEAs

Beweis.



- Zustände $\{q_0, q_1\}$ sowie $\{q_1, q_2\}$ sind unterscheidbar
- ebenso ist $\{q_0, q_2\}$ unterscheidbar bei Eingabe 0
- aber Zustand q_2 ist überflüssig