Diskrete Mathematik

Arne Dür Kurt Girstmair Simon Legner
Georg Moser Harald Zankl

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik @ UIBK
Sommersemester 2011

Zusammenfassung der letzten LV

Satz

angenommen

1. $\forall\ n$
2. $\exists$ *ein String* $w \in L$ *mit* $\ell(w) \geqslant n$ *und*
3. $\forall$ *Zerlegung von* w *in* x, y *und* z *mit* $\qquad w = xyz$
   - $y \neq \epsilon$,
   - $\ell(xy) \leqslant n$,
4. $\exists\ k$ *mit* $x(y)^k z \notin L$

dann ist L *nicht regulär*

Beispiel

die Sprache L über $\{0, 1\}$, deren Worte eine ungleiche Anzahl von 0en und 1en enthalten, ist nicht regulär

Übersicht

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

Übersicht

Endliche Automaten

Automaten, reguläre Sprachen und Grammatiken, (nicht)-deterministische endliche Automaten, Teilmengenkonstruktion, ϵ-NEAs, Umwandlung endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke, Pumpinglemma, Minimierung

Berechenbarkeitstheorie

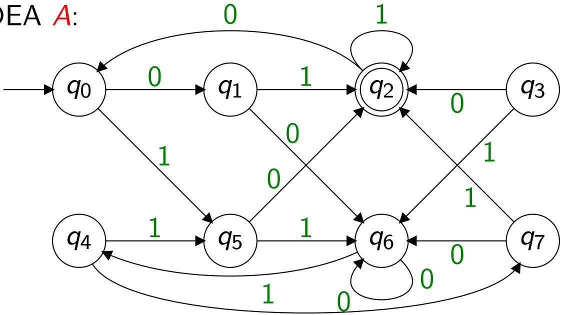
Einführung in die Berechenbarkeitstheorie, Turingmaschinen, Entscheidungsprobleme, Universelle Maschinen und Diagonalisierung

Komplexitätstheorie

Einführung in die Komplexitätstheorie, die Klassen P und NP, logarithmisch platzbeschränkte Reduktionen, Speicherplatzkomplexität

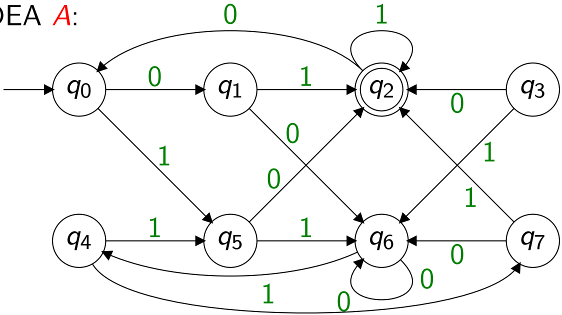
Beispiel

betrachte DEA A:



Beispiel

betrachte DEA A:

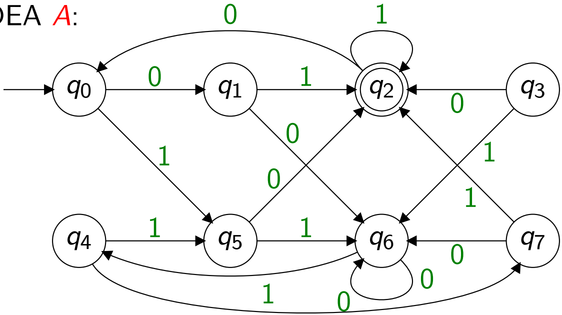


Frage

Kann der Automat A vereinfacht werden?

Beispiel

betrachte DEA A:



Frage

Kann der Automat A vereinfacht werden?

Antwort

Ja, denn intuitiv sind die folgenden Zustandspaare äquivalent

$$(q_0, q_4) \qquad (q_1, q_7) \qquad (q_3, q_5)$$

Zustandsäquivalenz

sei A ein DEA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Zustandsäquivalenz

sei A ein DEA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Definition

Zustände p und q heißen äquivalent wenn

- $\forall$ Strings w
  $\widehat{\delta}(p, w)$ genau dann akzeptierend, wenn $\widehat{\delta}(q, w)$ akzeptierend

Zustandsäquivalenz

sei A ein DEA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Definition

Zustände p und q heißen äquivalent wenn

- $\forall$ Strings w
  $\widehat{\delta}(p, w)$ genau dann akzeptierend, wenn $\widehat{\delta}(q, w)$ akzeptierend

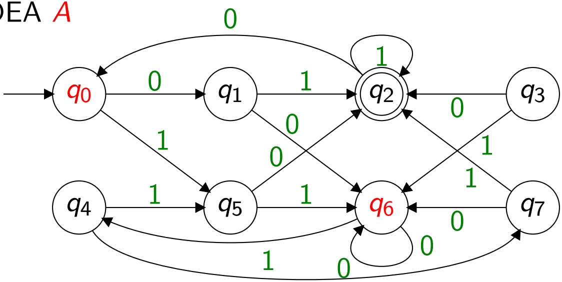
Definition

Zustände p und q heißen unterscheidbar wenn

- $\exists$ String w
  $\widehat{\delta}(p, w)$ akzeptierend, $\widehat{\delta}(q, w)$ nicht akzeptierend (oder umgekehrt)

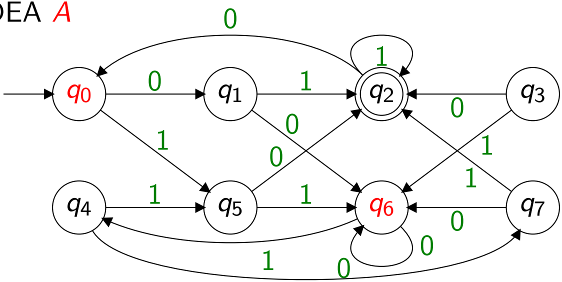
Beispiel

betrachte DEA A



Beispiel

betrachte DEA A

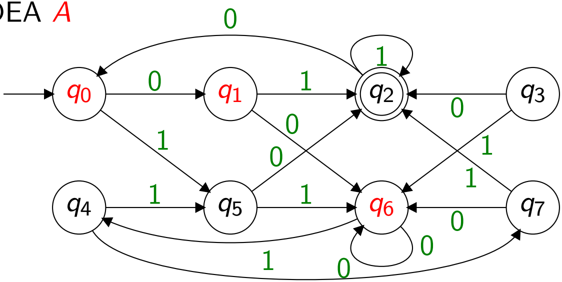


betrachte q_0 und q_6:

- ϵ, 0 ,1 unterscheiden nicht

Beispiel

betrachte DEA A

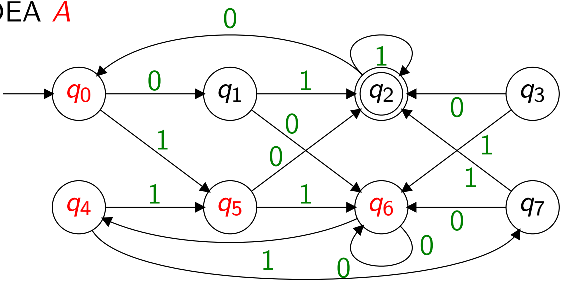


betrachte q_0 und q_6:

- ϵ, 0 ,1 unterscheiden nicht

Beispiel

betrachte DEA A

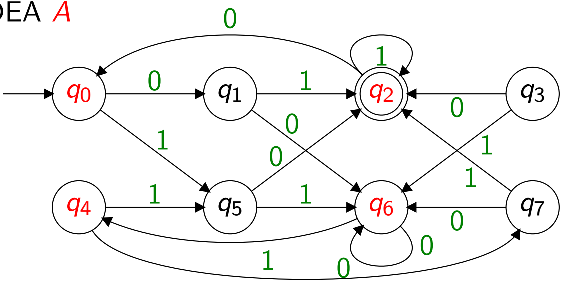


betrachte q_0 und q_6:

- ϵ, 0 ,1 unterscheiden nicht

Beispiel

betrachte DEA A

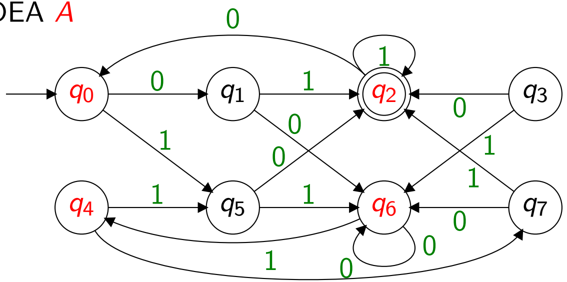


betrachte q_0 und q_6:

- ϵ, 0 ,1 unterscheiden nicht
- aber $\widehat{\delta}(q_0, 01) = q_2 \in F$
- $\widehat{\delta}(q_6, 01) = q_4 \notin F$

Beispiel

betrachte DEA A



betrachte q_0 und q_6:

- ϵ, 0 ,1 unterscheiden nicht
- aber $\widehat{\delta}(q_0, 01) = q_2 \in F$
- $\widehat{\delta}(q_6, 01) = q_4 \notin F$
- also sind q_0 und q_6 unterscheidbar

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA (nach der ursprünglichen Definition)

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA (nach der ursprünglichen Definition)

Definition

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA (nach der ursprünglichen Definition)

Definition

1. Basis
   wenn p akzeptierend und q nicht,
   dann sind $\{p, q\}$ unterscheidbar

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA (nach der ursprünglichen Definition)

Definition

1. **Basis**

   wenn p akzeptierend und q nicht,
   dann sind $\{p, q\}$ unterscheidbar

2. **Schritt**

   sei a ein Eingabezeichen und

   - sei $\delta(p, a) = r$, $\delta(q, a) = s$
   - sodass $\{r, s\}$ unterscheidbar

   dann sind $\{p, q\}$ unterscheidbar

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA (nach der ursprünglichen Definition)

Definition

1. Basis

   wenn p akzeptierend und q nicht,
   dann sind $\{p, q\}$ unterscheidbar

2. Schritt

   sei a ein Eingabezeichen und

   - sei $\delta(p, a) = r$, $\delta(q, a) = s$
   - sodass $\{r, s\}$ unterscheidbar

   dann sind $\{p, q\}$ unterscheidbar

Satz

sind Zustände p, q nach der induktiven Definition nicht unterscheidbar, dann sind sie auch äquivalent

Beweis.

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Beweis.

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

1. angenommen, der Satz wäre falsch

Beweis.

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

1. angenommen, der Satz wäre falsch
2. induktive Definition unterscheidet nicht zwischen p und q

Beweis.

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

1. angenommen, der Satz wäre falsch
2. induktive Definition unterscheidet nicht zwischen p und q
3. aber p und q sind nicht äquivalent, also
   $\exists$ w, sodass

$$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(q, w) \notin F$$

Beweis.

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

1. angenommen, der Satz wäre falsch
2. induktive Definition unterscheidet nicht zwischen p und q
3. aber p und q sind nicht äquivalent, also
   $\exists$ w, sodass
   $$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(q, w) \notin F$$
4. wir wählen $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ minimal; oBdA $w \neq \epsilon$

Beweis.

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

1. angenommen, der Satz wäre falsch
2. induktive Definition unterscheidet nicht zwischen p und q
3. aber p und q sind nicht äquivalent, also
   $\exists$ w, sodass
   $$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(q, w) \notin F$$
4. wir wählen $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ minimal; oBdA $w \neq \epsilon$
5. sei $r = \delta(p, a_1)$, $s = \delta(q, a_1)$

Beweis.

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

1. angenommen, der Satz wäre falsch
2. induktive Definition unterscheidet nicht zwischen p und q
3. aber p und q sind nicht äquivalent, also
   $\exists\ w$, sodass
   $$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(q, w) \notin F$$
4. wir wählen $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ minimal; oBdA $w \neq \epsilon$
5. sei $r = \delta(p, a_1)$, $s = \delta(q, a_1)$
6. nach Voraussetzung gilt
   - $\widehat{\delta}(r, a_2 \cdots a_n) \in F$, $\widehat{\delta}(s, a_2 \cdots a_n) \notin F$
   - und die induktive Definition unterscheidet zwischen r und s

Beweis.

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

1. angenommen, der Satz wäre falsch
2. induktive Definition unterscheidet nicht zwischen p und q
3. aber p und q sind nicht äquivalent, also
   $\exists\ w$, sodass
   $$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(q, w) \notin F$$
4. wir wählen $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ minimal; oBdA $w \neq \epsilon$
5. sei $r = \delta(p, a_1)$, $s = \delta(q, a_1)$
6. nach Voraussetzung gilt
   - $\widehat{\delta}(r, a_2 \cdots a_n) \in F$, $\widehat{\delta}(s, a_2 \cdots a_n) \notin F$
   - und die induktive Definition unterscheidet zwischen r und s
7. dann sind aber auch p, q unterscheidbar nach der induktiven Definition; das ist ein Widerspruch

Beweis.

betrachte $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

1. angenommen, der Satz wäre falsch
2. induktive Definition unterscheidet nicht zwischen p und q
3. aber p und q sind nicht äquivalent, also
   $\exists$ w, sodass
   $$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(q, w) \notin F$$
4. wir wählen $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ minimal; oBdA $w \neq \epsilon$
5. sei $r = \delta(p, a_1)$, $s = \delta(q, a_1)$
6. nach Voraussetzung gilt
   - $\widehat{\delta}(r, a_2 \cdots a_n) \in F$, $\widehat{\delta}(s, a_2 \cdots a_n) \notin F$
   - und die induktive Definition unterscheidet zwischen r und s
7. dann sind aber auch p, q unterscheidbar nach der induktiven Definition; das ist ein Widerspruch

wir schreiben die induktive Definition in einen Algorithmus um

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA

wir schreiben die induktive Definition in einen Algorithmus um

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA

Table-Filling Algorithmus

wir schreiben die induktive Definition in einen Algorithmus um

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA

Table-Filling Algorithmus

1. wenn p akzeptierend und q nicht, dann markiere $\{p, q\}$ als unterscheidbar

wir schreiben die induktive Definition in einen Algorithmus um

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA

Table-Filling Algorithmus

1. wenn p akzeptierend und q nicht, dann markiere $\{p, q\}$ als unterscheidbar
2. sei a ein Eingabezeichen und
   - sei $\delta(p, a) = r$, $\delta(q, a) = s$
   - sodass $\{r, s\}$ markiert

   dann markiere $\{p, q\}$ als unterscheidbar

wir schreiben die induktive Definition in einen Algorithmus um

sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA

Table-Filling Algorithmus

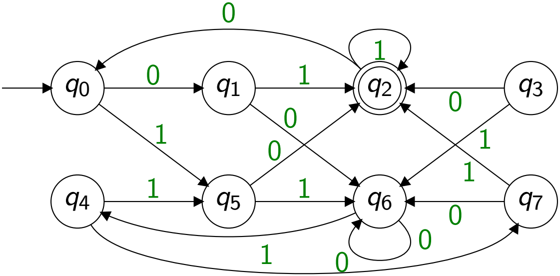
1. wenn p akzeptierend und q nicht, dann markiere $\{p, q\}$ als unterscheidbar
2. sei a ein Eingabezeichen und
   - sei $\delta(p, a) = r$, $\delta(q, a) = s$
   - sodass $\{r, s\}$ markiert

   dann markiere $\{p, q\}$ als unterscheidbar

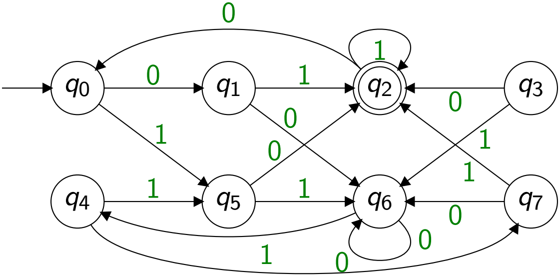
Fakten

- der Table-Filling Algorithmus ist korrekt
- das heißt, wenn das Paar $\{p, q\}$ nicht markiert werden kann, dann sind p und q äquivalent

Beispiel



Beispiel



q_0

q_1

q_2

q_3

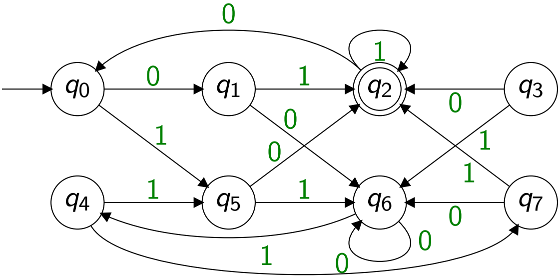
q_4

q_5

q_6

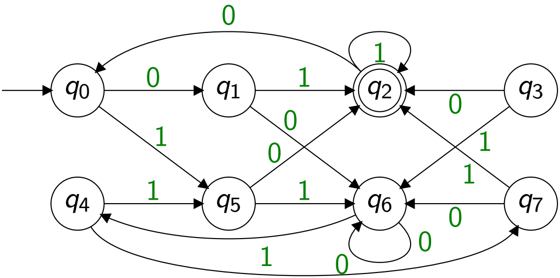
q_7

Beispiel



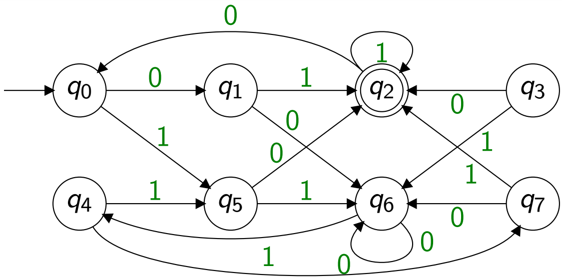
q_0							
	q_1						
✓	✓	q_2					
		✓	q_3				
		✓		q_4			
		✓			q_5		
		✓				q_6	
		✓					q_7

Beispiel



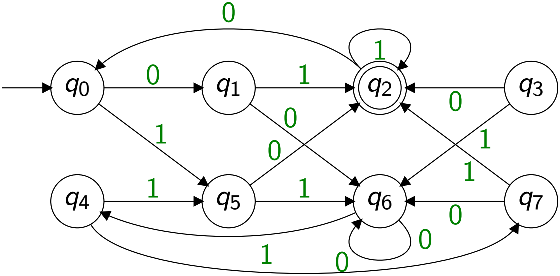
q_0							
✓	q_1						
✓	✓	q_2					
		✓	q_3				
		✓		q_4			
		✓			q_5		
		✓				q_6	
		✓					q_7

Beispiel



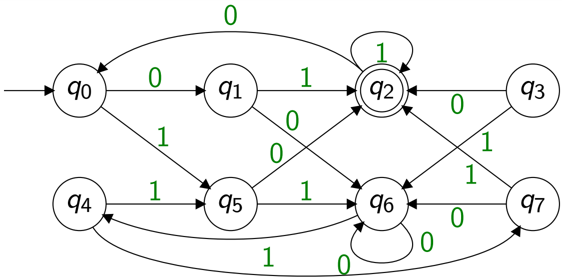
q_0							
✓	q_1						
✓	✓	q_2					
		✓	q_3				
		✓		q_4			
		✓		✓	q_5		
		✓				q_6	
		✓					q_7

Beispiel



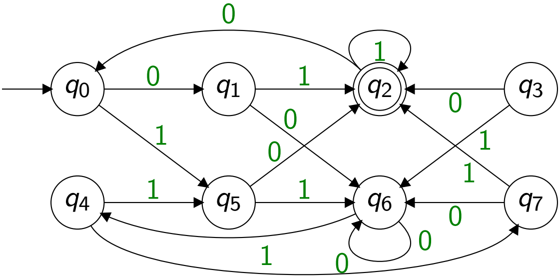
q_0							
✓	q_1						
✓	✓	q_2					
✓	✓	✓	q_3				
	✓	✓	✓	q_4			
✓	✓	✓		✓	q_5		
	✓	✓	✓		✓	q_6	
✓		✓	✓	✓	✓	✓	q_7

Beispiel



q_0							
✓	q_1						
✓	✓	q_2					
✓	✓	✓	q_3				
	✓	✓	✓	q_4			
✓	✓	✓		✓	q_5		
✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_6	
✓		✓	✓	✓	✓	✓	q_7

Beispiel



	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_1	✓						
q_2	✓	✓					
q_3	✓	✓	✓				
q_4		✓	✓	✓			
q_5	✓	✓	✓		✓		
q_6	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
q_7	✓		✓	✓	✓	✓	✓

Table-Filling Algorithmus liefert die folgenden Zustandsblöcke:

$\{q_0, q_4\}$, $\{q_1, q_7\}$, $\{q_3, q_5\}$, $\{q_2\}$, $\{q_6\}$

Satz

1. *die Äquivalenz von Zuständen ist transitiv: wenn (i) Zustände p und q äquivalent und (ii) Zustände q und r äquivalent, dann sind auch p und r äquivalent*

Satz

1. *die Äquivalenz von Zuständen ist transitiv: wenn (i) Zustände p und q äquivalent und (ii) Zustände q und r äquivalent, dann sind auch p und r äquivalent*

Beweis.

Satz

1. *die Äquivalenz von Zuständen ist transitiv: wenn (i) Zustände p und q äquivalent und (ii) Zustände q und r äquivalent, dann sind auch p und r äquivalent*

Beweis.

- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- angenommen $\{p, q\}$ und $\{q, r\}$ sind äquivalent, aber $\{p, r\}$ sind unterscheidbar

Satz

1. *die Äquivalenz von Zuständen ist transitiv: wenn (i) Zustände p und q äquivalent und (ii) Zustände q und r äquivalent, dann sind auch p und r äquivalent*

Beweis.

- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- angenommen $\{p, q\}$ und $\{q, r\}$ sind äquivalent, aber $\{p, r\}$ sind unterscheidbar
- $\exists$ String w

$$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(r, w) \notin F$$

Satz

1. *die Äquivalenz von Zuständen ist transitiv: wenn (i) Zustände p und q äquivalent und (ii) Zustände q und r äquivalent, dann sind auch p und r äquivalent*

Beweis.

- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- angenommen $\{p, q\}$ und $\{q, r\}$ sind äquivalent,
  aber $\{p, r\}$ sind unterscheidbar
- $\exists$ String w

$$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(r, w) \notin F$$

- also $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$ sonst wären q und r unterscheidbar

Satz

1. *die Äquivalenz von Zuständen ist transitiv: wenn (i) Zustände p und q äquivalent und (ii) Zustände q und r äquivalent, dann sind auch p und r äquivalent*

Beweis.

- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- angenommen $\{p, q\}$ und $\{q, r\}$ sind äquivalent, aber $\{p, r\}$ sind unterscheidbar
- $\exists$ String w

$$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(r, w) \notin F$$

- also $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$ sonst wären q und r unterscheidbar
- also $\widehat{\delta}(p, w) \in F$ und $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$,

Satz

1. *die Äquivalenz von Zuständen ist transitiv: wenn (i) Zustände p und q äquivalent und (ii) Zustände q und r äquivalent, dann sind auch p und r äquivalent*

Beweis.

- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- angenommen $\{p, q\}$ und $\{q, r\}$ sind äquivalent, aber $\{p, r\}$ sind unterscheidbar
- $\exists$ String w

$$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(r, w) \notin F$$

- also $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$ sonst wären q und r unterscheidbar
- also $\widehat{\delta}(p, w) \in F$ und $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$,
- somit sind p und q unterscheidbar: Widerspruch

Satz

1. *die Äquivalenz von Zuständen ist transitiv: wenn (i) Zustände p und q äquivalent und (ii) Zustände q und r äquivalent, dann sind auch p und r äquivalent*

Beweis.

- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- angenommen $\{p, q\}$ und $\{q, r\}$ sind äquivalent, aber $\{p, r\}$ sind unterscheidbar
- $\exists$ String w

$$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(r, w) \notin F$$

- also $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$ sonst wären q und r unterscheidbar
- also $\widehat{\delta}(p, w) \in F$ und $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$,
- somit sind p und q unterscheidbar: Widerspruch

Satz

1. *die Äquivalenz von Zuständen ist transitiv: wenn (i) Zustände p und q äquivalent und (ii) Zustände q und r äquivalent, dann sind auch p und r äquivalent*
2. *die Blöcke der äquivalenten Zustände formen eine Partition*

Beweis.

- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- angenommen $\{p, q\}$ und $\{q, r\}$ sind äquivalent, aber $\{p, r\}$ sind unterscheidbar
- $\exists$ String w

$$\widehat{\delta}(p, w) \in F \qquad \widehat{\delta}(r, w) \notin F$$

- also $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$ sonst wären q und r unterscheidbar
- also $\widehat{\delta}(p, w) \in F$ und $\widehat{\delta}(q, w) \notin F$,
- somit sind p und q unterscheidbar: Widerspruch ∎

Definition

DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
konstruiere $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$:

Definition

DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
konstruiere $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$:

1. unerreichbare Zustände eliminieren

Definition

DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
konstruiere $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$:

1. unerreichbare Zustände eliminieren
2. partitioniere die Zustände in äquivalente Blöcke

Definition

DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
konstruiere $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$:

1. unerreichbare Zustände eliminieren
2. partitioniere die Zustände in äquivalente Blöcke
3. Q_B sind die verschiedenen Blöcke

Definition

DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
konstruiere $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$:

1. unerreichbare Zustände eliminieren
2. partitioniere die Zustände in äquivalente Blöcke
3. Q_B sind die verschiedenen Blöcke
4. $\forall$ Blöcke S, $\forall$ a ein Eingabesymbol:
   $\exists$ Block T, sodass für alle $q \in S$ gilt $\delta(q, a) \in T$

Definition

DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
konstruiere $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$:

1. unerreichbare Zustände eliminieren
2. partitioniere die Zustände in äquivalente Blöcke
3. Q_B sind die verschiedenen Blöcke
4. $\forall$ Blöcke S, $\forall$ a ein Eingabesymbol:
   $\exists$ Block T, sodass für alle $q \in S$ gilt $\delta(q, a) \in T$
   setze $\delta_B(S, a) = T$

Definition

DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
konstruiere $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$:

1. unerreichbare Zustände eliminieren
2. partitioniere die Zustände in äquivalente Blöcke
3. Q_B sind die verschiedenen Blöcke
4. $\forall$ Blöcke S, $\forall$ a ein Eingabesymbol:
   $\exists$ Block T, sodass für alle $q \in S$ gilt $\delta(q, a) \in T$
   setze $\delta_B(S, a) = T$
5. q_B ist der Block, der q_0 enthält

Definition

DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
konstruiere $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$:

1. unerreichbare Zustände eliminieren
2. partitioniere die Zustände in äquivalente Blöcke
3. Q_B sind die verschiedenen Blöcke
4. $\forall$ Blöcke S, $\forall$ a ein Eingabesymbol:
   $\exists$ Block T, sodass für alle $q \in S$ gilt $\delta(q, a) \in T$
   setze $\delta_B(S, a) = T$
5. q_B ist der Block, der q_0 enthält
6. F_B ist die Menge der Blöcke, die Zustände aus F enthalten

Definition

DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
konstruiere $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$:

1. unerreichbare Zustände eliminieren
2. partitioniere die Zustände in äquivalente Blöcke
3. Q_B sind die verschiedenen Blöcke
4. $\forall$ Blöcke S, $\forall$ a ein Eingabesymbol:
   $\exists$ Block T, sodass für alle $q \in S$ gilt $\delta(q, a) \in T$
   setze $\delta_B(S, a) = T$
5. q_B ist der Block, der q_0 enthält
6. F_B ist die Menge der Blöcke, die Zustände aus F enthalten

Beobachtung

nicht anwendbar für deterministische Automaten nach der erweiterten Definition

Beispiel

Minimierung des Automaten A:

Beispiel

Minimierung des Automaten A:

1. alle Zustände, außer q_3, sind erreichbar

Beispiel

Minimierung des Automaten A:

1. alle Zustände, außer q_3, sind erreichbar
2. Zustände des minimierten Automaten B:

$$\{q_0, q_4\} \quad \{q_1, q_7\} \quad \{q_2\} \quad \{q_5\} \quad \{q_6\}$$

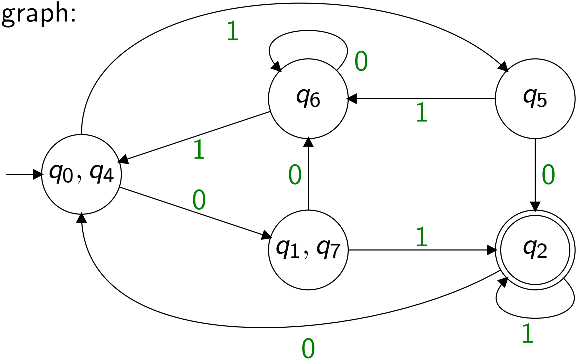
Beispiel

Minimierung des Automaten A:

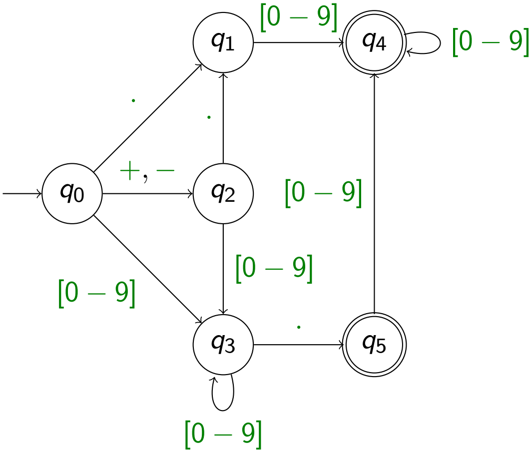
1. alle Zustände, außer q_3, sind erreichbar
2. Zustände des minimierten Automaten B:

$$\{q_0, q_4\} \quad \{q_1, q_7\} \quad \{q_2\} \quad \{q_5\} \quad \{q_6\}$$

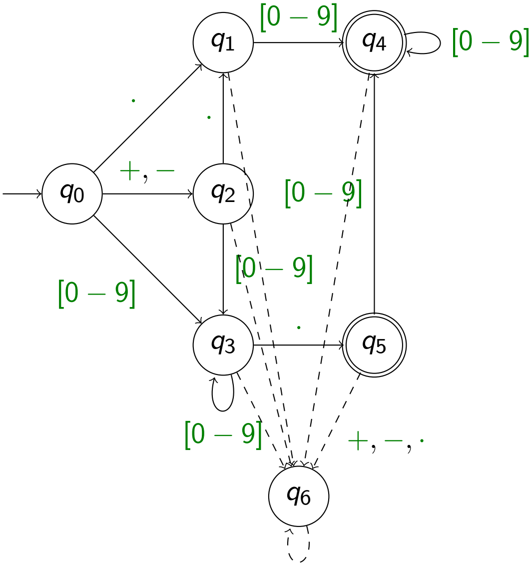
3. Zustandsgraph:



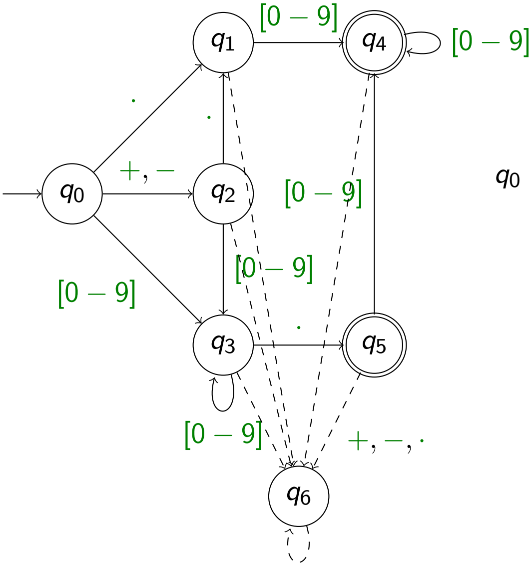
Beispiel: Der Dezimalzahlautomat



Beispiel: Der Dezimalzahlautomat



Beispiel: Der Dezimalzahlautomat



q_0

q_1

q_2

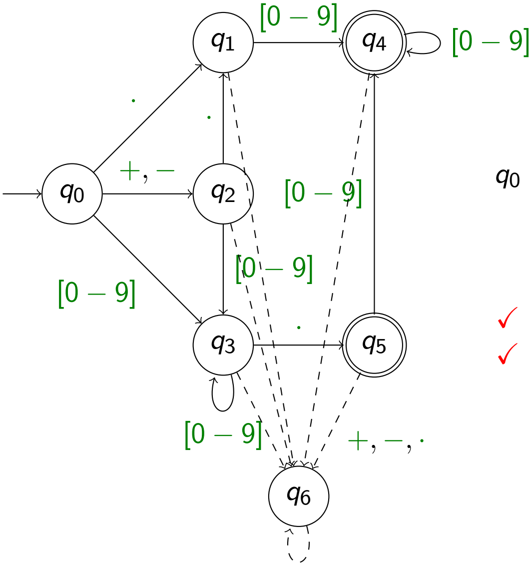
q_3

q_4

q_5

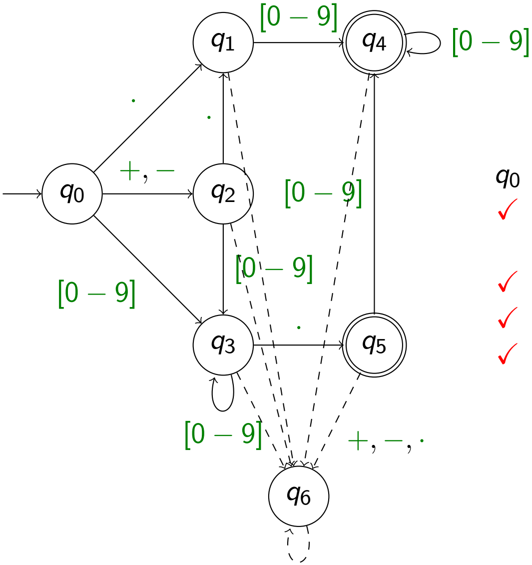
q_6

Beispiel: Der Dezimalzahlautomat



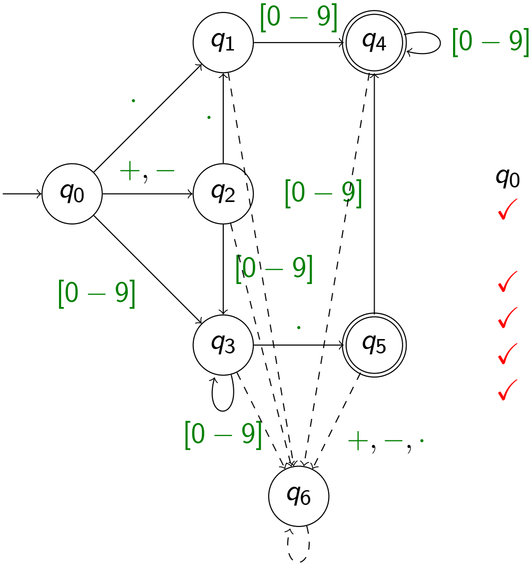
q_0						
	q_1					
		q_2				
			q_3			
✓	✓	✓	✓	q_4		
✓	✓	✓	✓		q_5	
				✓	✓	q_6

Beispiel: Der Dezimalzahlautomat



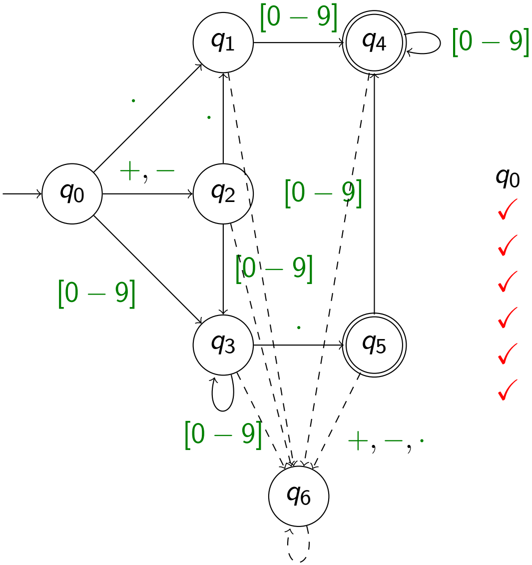
q_0						
✓	q_1					
	✓	q_2				
✓	✓	✓	q_3			
✓	✓	✓	✓	q_4		
✓	✓	✓	✓		q_5	
	✓		✓	✓	✓	q_6

Beispiel: Der Dezimalzahlautomat



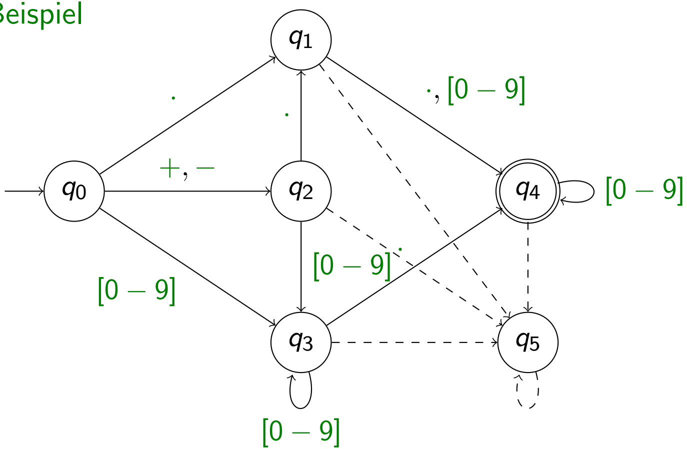
q_0						
✓	q_1					
	✓	q_2				
✓	✓	✓	q_3			
✓	✓	✓	✓	q_4		
✓	✓	✓	✓		q_5	
✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_6

Beispiel: Der Dezimalzahlautomat

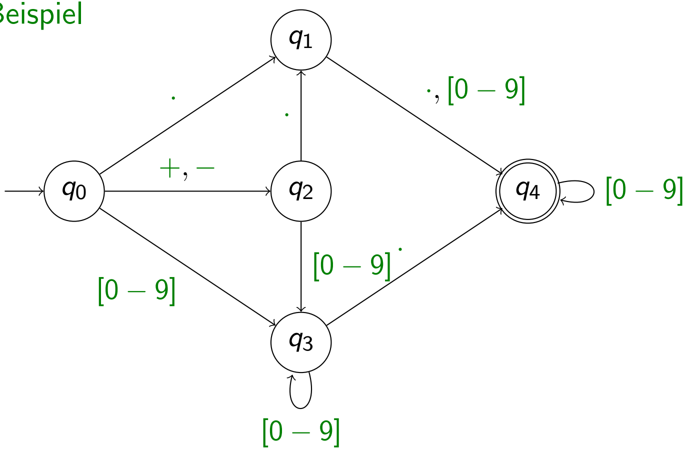


q_0						
✓	q_1					
✓	✓	q_2				
✓	✓	✓	q_3			
✓	✓	✓	✓	q_4		
✓	✓	✓	✓		q_5	
✓	✓	✓	✓	✓	✓	q_6

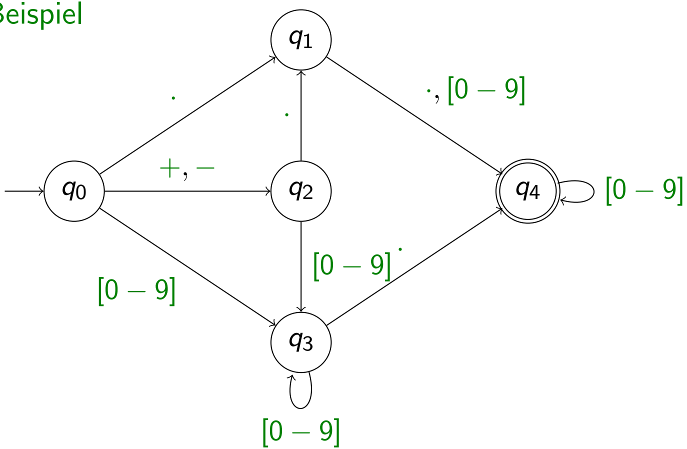
Beispiel



Beispiel



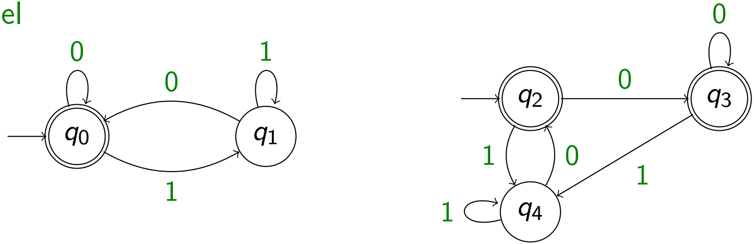
Beispiel



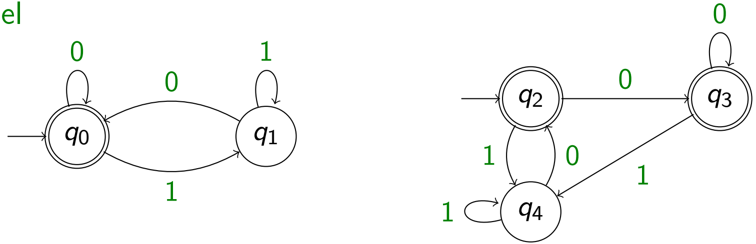
Satz

1. *der Minimierungsalgorithmus ist optimal*
2. *das Ergebnis des Minimierungsalgorithmus ist eindeutig*

Beispiel



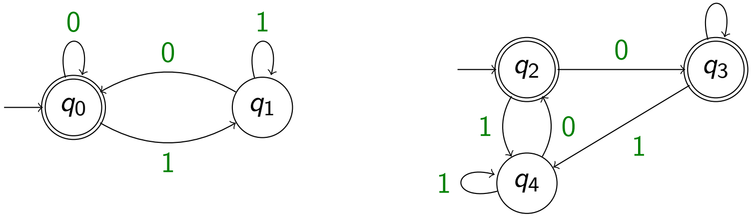
Beispiel



Beobachtung

- beide DEAs akzeptieren $L(\epsilon + (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\mathbf{0})$
- zur Kontrolle wenden wir den Table-Filling Algorithmus auf einen Automat mit zwei Startzuständen an:

Beispiel



Beobachtung

- beide DEAs akzeptieren $L(\epsilon + (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \mathbf{0})$
- zur Kontrolle wenden wir den Table-Filling Algorithmus auf einen Automat mit zwei Startzuständen an:

q_0				
✓	q_1			
	✓	q_2		
	✓		q_3	
✓		✓	✓	q_4

Minimierung eines NEA

Beobachtung

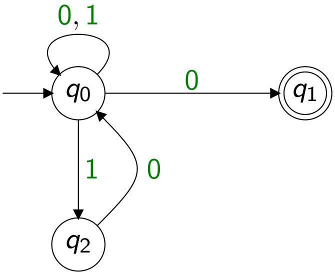
Minimierungsalgorithmus ist nicht korrekt für NEAs

Minimierung eines NEA

Beobachtung

Minimierungsalgorithmus ist nicht korrekt für NEAs

Beweis.

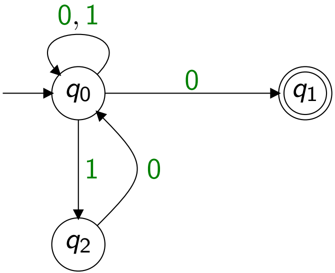


Minimierung eines NEA

Beobachtung

Minimierungsalgorithmus ist nicht korrekt für NEAs

Beweis.



- Zustände $\{q_0, q_1\}$ sowie $\{q_1, q_2\}$ sind unterscheidbar
- ebenso ist $\{q_0, q_2\}$ unterscheidbar bei Eingabe 0
- aber Zustand q_2 ist überflüssig