Was ist das SAT Problem?

David Triendl

4. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Als das SAT Problem (aus dem Englischen von *satisfiability*, Erfüllbarkeit) wird die Frage danach, ob eine Formel der Aussagenlogik unter einer frei wählbaren Belegung der Atome wahr ist, bezeichnet. Es gehört zur Klasse der NP-vollständigen Probleme, einer Teilklasse der NP-Probleme. Das heißt, dass es sich von einem deterministischen Algorithmus nicht in polynomialer Zeit lösen lässt. Mithilfe von Wahrheitstabellen lässt es sich immer in exponentieller Zeit bestimmen.

Das SAT Problem ist ein wichtigstes Problem der Informatik. Praktische Anwendung finden SAT Solver - Programme zum Lösen des Problems - unter anderem beim automatischen Beweisen, im Entwurf von elektronischen Schaltungen, aber auch in Logikpuzzles wie zum Beispiel Sudokus. Anstatt für spezifische Probleme eine spezifische Lösung zu finden kann die Umformung eines Problems in ein SAT Problem und die Anwendung eines SAT Solvers eine einfachere Lösungsmethode darstellen.

1 Aussagenlogik

Teile der Aussagenlogik gehen bereits auf die griechischen Philosophen zurück. [5] Den Grundstein legte jedoch George Boole in seinen 1847 bzw. 1854 veröffentlichten Werken *The Mathematical Analysis of Logic* und *An Investigation of the Laws of Thought*, in denen er eine Algebra, die mit einigen Änderungen heute als *Boolesche Algebra* bekannt ist, beschrieb. [1] [2] Diese Algebra verwendet Variablen mit den Werten 0 für falsch und 1 für wahr, die durch Addition (entspricht Oder-Verknüpfung), Multiplikation (Und-Verknüpfung) und Negation kombiniert werden.

In der Aussagenlogik wird mit Atomen (vom Englischen *atom*, oft auch als Elementaraussage übersetzt) gearbeitet, die entweder wahr oder falsch sind. Diese Atome können wie in der Booleschen Algebra miteinander verknüpft werden, wobei die in Abbildung 1 gezeigten Symbole Verwendung finden.

$p \vee q$	Die Aussage ist wahr, wenn mindestens eines der beiden Atome p oder q wahr ist.
$p \wedge q$	Die Aussage ist wahr, wenn beide Atome p und q wahr sind.
$\neg p$	Die Aussage ist wahr, wenn Atom p nicht wahr ist.
$p \to q$	Die Aussage ist wahr, wenn aus p q folgt, das heißt, wenn p wahr ist, muss q auch wahr sein, wenn p falsch ist, kann q beliebig sein.

Abbildung 1: Symbole zur Kombination von logischen Aussagen. [5]

2 Erfüllbarkeit

Als erfüllbar wird eine Aussage genau dann bezeichnet, wenn sie unter mindestens einer Belegung der Atome wahr ist. Neben der das SAT Problem definierenden Frage der Erfüllbarkeit gibt es weitere damit verbundene Eigenschaften:

Tautologie Eine Formel, die unter allen Belegungen von Atomen wahr ist, wird als Tautologie bezeichnet.

Widerlegbarkeit Eine Formel, die unter mindestens einer Belegung falsch ist, wird als widerlegbar bezeichnet.

Unerfüllbarkeit Eine Formel, die unter allen Belegungen falsch ist, wird als unerfüllbar bezeichnet.

Diese drei Eigenschaften lassen sich durch folgende Zusammenhänge auf das SAT Problem zurückführen:

- Eine Formel ϕ ist genau dann eine Tautologie, wenn ihre Negation $\neg\phi$ nicht erfüllbar ist.

- Eine Formel ϕ ist genau dann widerlegbar, wenn ihre Negation $\neg\phi$ erfüllbar ist.
- Eine Formel ϕ ist genau dann unerfüllbar, wenn ϕ nicht erfüllbar ist.

3 NP-Vollständigkeit

„Eine Sprache $L \in \mathsf{NP}$ heißt **NP-vollständig**, wenn für alle $L' \in \mathsf{NP}$ gilt $L' \leq_p L$." [4] Ein Problem ist also NP-vollständig, wenn es in der Menge der NP-Probleme ist, und wenn sich alle anderen Elemente der Klasse NP mittels eines deterministischen Turingmaschine in polynomialer Laufzeit zu diesem Problem umformen lassen. Ein Problem ist in der Klasse NP, wenn es sich von einer nichtdeterministischen Turingmaschine in maximal polynomialer Laufzeit lösen lässt. Eine Lösung kann auch von einer deterministischen Turingmaschine in polynomialer Zeit verifiziert werden.

1971 zeigte Stephen Cook, dass das SAT Problem NP-vollständig ist. [3] Damit war das SAT Problem das erste Problem, das als NP-vollständig gezeigt wurde.

4 Wahrheitstabellen

Bei einer Wahrheitstabelle werden alle Kombinationen von Belegungen der Atome mit wahr und falsch überprüft. Sofern mindestens eine der Kombinationen in einer wahren Aussage resultiert, ist das Problem erfüllbar. Abbildung 2 zeigt eine solche Wahrheitstabelle für eine Aussage mit zwei Atomen. Wahrheitstabellen sind einfach zu erstellen, aber ineffizient.

p	q	p $\rightarrow q \wedge p$	$(\neg q \vee \neg p) \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q \wedge p) \vee ((\neg q \vee \neg p) \rightarrow \neg p)$
wahr	wahr	wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr	wahr	wahr
falsch	falsch	wahr	wahr	wahr

Abbildung 2: Eine Wahrheitstabelle für die Aussage $(p \rightarrow q \wedge p) \vee ((\neg q \vee \neg p) \rightarrow \neg p)$.

Schlussfolgerung

In meiner Arbeit habe ich die Aussagenlogik, die Verknüpfung von wahren oder falschen Atomen zu Aussagen, vorgestellt. Die Bestimmung, ob Formeln der Aussagenlogik erfüllbar sind stellt ein NP-komplettes Problem dar, das als SAT Problem bekannt ist. Als Beispiel für einen naiven Lösungsansatz und um die Komplexität des Problems aufzuzeigen habe ich die Wahrheitstabelle vorgestellt.

Literatur

[1] George Boole. *The Mathematical Analysis of Logic.* 1847.

[2] George Boole. *An Investigation of the Laws of Thought.* 1854.

[3] Stephen A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. In *Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*, STOC '71, pages 151–158, New York, NY, USA, 1971. ACM.

[4] Gerhard Goos. *Vorlesungen über Informatik Band 3: Berechenbarkeit, formale Sprachen, Spezifikationen.* Springer-Verlag, 1997.

[5] Michael Huth and Mark Dermot Ryan. *Logic in Computer Science - Modelling and Reasoning about Systems.* Cambridge University Press, second edition, 2004.