

# Wer war Kurt Gödel?

Sebastian Mayr

4. Juni 2012

## 1 Einleitung

Kurt Gödel gilt als der bedeutendste Logiker des 20. Jahrhunderts. Seine Entdeckungen sind von „allerhöchster Bedeutung für die Mathematik“ [1] und haben „Auswirkungen auf unser Selbstverständnis als reflektierende Menschen“ [2]. Sein Unvollständigkeitssatz, der die Grenzen formaler Systeme zeigt, gehört zu den wichtigsten Sätzen der Logik und ist laut John von Neumann „ein Wahrzeichen, das in Raum und Zeit weit hin sichtbar erhalten bleiben wird“<sup>1</sup>. In dieser Arbeit wird einerseits das Leben Kurt Gödels thematisiert und andererseits ein grundlegender Überblick über den berühmten Unvollständigkeitssatz gegeben.

## 2 Biographie

Kurt Gödel wurde am 28. April 1906 im damaligen Österreich-Ungarn in der Stadt Brünn (dem heutigen Brno in Tschechien) geboren. Er war der zweite Sohn des aus Wien stammenden Rudolf Gödel und seiner Frau Marianne Handschuh. Als Direktor einer großen Textilfabrik konnte Rudolf Gödel seiner Familie ein Leben in Wohlstand ermöglichen und sie später vor den Wirren des 1. Weltkriegs und seinen Folgen bewahren [2].

### 2.1 Kindheit

Kurt Gödel war bereits als Kind sehr wissbegierig, was ihm den Spitznamen „Herr Warum“ einbrachte [1]. Auch in der Schule erwies er sich als begabt und fleißig und

---

<sup>1</sup>Auszug aus von Neumanns Rede zur Verleihung des Albert Einstein Awards am 15. März 1951

hatte immer die besten Noten. Im Alter von sechs Jahren erkrankte Gödel schwer an rheumatischem Fieber. Daraufhin las er medizinische Fachbücher und gelang zur Überzeugung, trotz der guten Genesung, einen Herzschaden erlitten zu haben. An ähnlichen hypochondrischen Sorgen um seine Gesundheit litt er zeit seines Lebens.

## 2.2 Studium in Wien

Nach Abschluss des Staatsrealgymnasiums folgte er 1924 seinem Bruder nach Wien um dort Mathematik, Physik und Philosophie zu studieren. Gödel wollte sich zunächst auf theoretische Physik spezialisieren, entschied sich jedoch später – begeistert von der Vorlesung über Zahlentheorie von Philipp Furtwängler – für Mathematik. Ab 1926 nahm Gödel regelmäßig an den Treffen des Wiener Kreises teil. Der Wiener Kreis war eine Gruppe von Philosophen und Mathematiker, die sich unter anderem mit der Übersetzung wissenschaftlicher Aussagen in eine umfassende formale Sprache beschäftigten. Die Debatten im Rahmen des Wiener Kreises weckten Gödels Interesse an den Arbeiten von Bertrand Russell und David Hilbert über die Grundlagenprobleme der Mathematik und der Logik. Außerdem besuchte er Karl Mengers Kolloquien wodurch er in Kontakt mit Kollegen wie z.B. Alfred Tarski und John von Neumann kam. In diesem Umfeld hatte Gödel seine produktivste Zeit: 1929 publizierte er seine Dissertation über die Vollständigkeit der Prädikatenlogik. Zwei Jahre später veröffentlichte er mit dem Beweis der Unvollständigkeit der Arithmetik sein bedeutendstes Werk. Im Jahr 1927 lernte er seine spätere Frau Adele Porkert kennen. Da Adele bereits verheiratet gewesen war, lehnten Gödels Eltern die Ehe zunächst ab. Erst im Jahr 1938 heirateten sie. In den 1930er Jahren besuchte Gödel mehrmals das Institute of Advanced Study (IAS) in Princeton um dort als Gastprofessor zu unterrichten. Als man ihm, im Zuge der Machtübernahme der Nationalsozialisten, die Privatdozentur aberkannte und ihn für tauglich für den Fronteinsatz befand, verließ er im Jahr 1939 Wien und zog mit seiner Frau nach Princeton.

## 2.3 Princeton

In Princeton beschäftigte er sich neben der Präzisierung seiner mathematischen Ideen zunehmend mit den philosophischen Auswirkungen seiner Entdeckungen. Einige dieser Werke gehören heute zu den wesentlichen Bestandteilen der Philosophie der Mathematik. Außerdem arbeitete er – inspiriert durch seine enge Freundschaft mit Einstein – an Fragen der allgemeinen Relativitätstheorie. Gödel lebte sehr zurückgezogen, vermied öffentliche Auftritte und bevorzugte die telefonische Kommunikation. In den 1950er Jahren verschlechterte sich sein Gesundheitszustand: Nachdem er 1951 fast an einem Magengeschwür gestorben wäre, hielt sich Gödel an eine strenge selbst auferlegte Diät, wodurch er, in Verbindung mit seiner paranoiden Angst vergiftet zu werden, stark an Gewicht verlor. Aufgrund seiner psychischen Probleme publiziert Gödel ab 1958 keine

wissenschaftlichen Arbeiten mehr. Als 1977 seine Frau Adele wegen einer Notoperation mehrere Monate im Krankenhaus verbringen musste, magerte Gödel bis auf 40kg ab. Nach Adeles Entlassung lieferte sie ihn sofort ins Krankenhaus ein. Wenige Wochen später, am 14. Januar 1987, starb Kurt Gödel an Unterernährung [2]. In seinem letzten Lebensabschnitt erhielt er eine Vielzahl an Preisen und Ehrungen, unter anderem den ersten Albert Einstein Award, die National Medal of Science und die Ehrendoktorwürde an den Universitäten Harvard und Yale [3].

## 3 Gödels Unvollständigkeitssatz

### 3.1 Mathematische Vorgeschichte

Als zu Beginn des 20. Jahrhunderts von Bertrand Russell und Ernst Zermelo Widersprüche in der damaligen Mengenlehre entdeckt wurden schlitterte die Mathematik in eine Grundlagenkrise. In den folgenden Jahren gab es mehrere Ansätze diese grundlegenden Probleme zu lösen:

Alfred North Whitehead und Bertrand Russell versuchten in ihrem Werk „Principia Mathematica“ die gesamte Mathematik auf die Logik zurückzuführen. Darauf aufbauend formulierte David Hilbert in den 1920er Jahren das „Hilbertprogramm“. Durch die Verwendung eines formalen Systems, welches auf endlich große Sätze und eine endlich lange Beweisführung beschränkt ist, wollte er die Widerspruchsfreiheit der Mathematik sicherstellen.

Die Grundlage dieses Systems war die Prädikatenlogik, über die Hilbert, mithilfe von wohldefinierten Axiomen (beweislosen Voraussetzungen) und Schlussregeln, alle mathematischen Wahrheiten herleiten wollte [2]. Dabei stellte er zwei zentrale Forderungen an dieses Axiomensystem:

- Es sollen nur wahre Aussagen beweisbar sein (Konsistenz).
- Alle Aussagen sollen beweisbar bzw. widerlegbar sein (Vollständigkeit).

Gödel bewies, in seiner Dissertation von 1929, die semantische Vollständigkeit der Prädikatenlogik und zeigte somit, dass alle allgemeingültigen Aussagen mithilfe der Schlussregeln ableitbar sind [1]. Dieses Resultat weckte die Hoffnung der mathematischen Gemeinschaft, dass nun auch bald die Vollständigkeit von Axiomensystemen (wie z.B. das der Arithmetik oder sogar das der gesamten Mathematik) gezeigt werden kann [2].

## 3.2 Die Beweisidee

Gödel zeigte mit seinem (ersten) Unvollständigkeitssatz, dass jedes Axiomensystem der Arithmetik entweder unvollständig oder inkonsistent ist. Um die Unvollständigkeit zu beweisen, definierte Gödel zunächst ein Verfahren welches jeder Aussage im Axiomensystem eine eindeutige Nummer (Gödelnummer) zuordnet [1]. Dadurch konnte er eine Aussage über die Arithmetik in einen arithmetischen Ausdruck übersetzen. Dies ermöglichte es wiederum eine Aussage zu konstruieren, die über sich selbst behauptet „Diese Aussage ist nicht beweisbar“. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

- Die Aussage ist beweisbar und dadurch im Axiomensystem wahr. Da die Aussage jedoch über sich selbst das Gegenteil behauptet ist sie falsch und somit das Axiomensystem inkonsistent.
- Die Aussage ist nicht beweisbar. Da die Aussage genau das über sich selbst behauptet ist sie wahr und somit das Axiomensystem unvollständig.

Aus dem Beweis folgt weiters, dass der Unvollständigkeitssatz für jedes hinreichend mächtige Axiomensystem gilt [2].

## 3.3 Auswirkungen

In einem Zusatz zum ersten Unvollständigkeitssatz konnte Gödel zeigen, dass jedes hinreichend mächtige formale System die eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen kann (zweiter Unvollständigkeitssatz). Damit galt der Versuch die Mathematik als rein formales Gebilde zu definieren als gescheitert und „der jahrtausendelange Traum der Reinheit der Mathematik, von Aristoteles bis Hilbert, zerschellte“ [2]. Angeregt durch Gödels Beweis beschäftigten sich Alonzo Church und Alan Turing – zwei Pioniere der Informatik – mit der mechanischen Verwirklichung formaler Problemstellungen. Ihre Entdeckungen zeigen die Grenzen der Berechenbarkeit, die auch moderne Computer betreffen [2].

## Literatur

- [1] John W. Dawson, Jr. *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*. A. K. Peters, Ltd., 2005.
- [2] W. DePauli-Schimanovich and P. Weibel. *Kurt Gödel: ein mathematischer Mythos*. Hölder-Pichler-Tempsky, 1997.
- [3] G. Kreisel. Kurt Gödel. *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, 26:148–224, 1980.